

Domaća zadaća 4

Pretpostavljamo da vrijede Birkhoffovi aksiomi ravninske geometrije (cjelina 2.3 u [skripti](#)).

1. Definirajte dužinu i polovište dužine. Dokažite da svaka dužina ima jedinstveno polovište.
2. Definirajte vršne kutove. Dokažite da vršni kutovi imaju istu mjeru.
3. U modelu H^2 nađite protuprimjer za obrat teorema o nasuprotnim unutarnjim kutovima (teorema 3.1 u [skripti](#)). Koristeći se aksiomom 7E dokažite obrat tog teorema.
4. Proučite dokaz 5. propozicije u Euklidovim *Elementima*.
5. U modelu hiperbolične ravnine nađite protuprimjer za kriterij sukladnosti SSK. Točnije, nađite četiri točke $A, B_1, B_2, C \in H^2$ takve da A, B_1 i B_2 leže na istom pravcu, C ne leži na tom pravcu, A nije između B_1 i B_2 (tj. $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB_2}$) te vrijedi $|B_1C| = |B_2C|$, ali trokuti $\triangle AB_1C$ i $\triangle AB_2C$ nisu sukladni.
6. Definirajte pojam četverokuta i, općenito, n -terokuta (poligona) u ravnini.
7. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B i C . Dokažite da nasuprotne stranice leže na pravcima koji se ne sijeku. Dokažite da vrijedi $|AB| = |BC|$ ako i samo ako vrijedi $|CD| = |DA|$.
8. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut u modelu hiperbolične ravnine H^2 s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ i $d = |DA|$. Dokažite da tada vrijedi $\operatorname{sh} c = \operatorname{ch} d \cdot \operatorname{sh} a$.
9. Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom \overline{AB} i gornjom osnovicom \overline{CD} . Neka su E i F poloviša osnovica, a G i H polovišta krakova. Dokažite bez korištenja aksioma o paralelama da su pravci EF i GH suokomiti.
10. Dokažite bez korištenja aksioma o paralelama: četverokut kojem su dva susjedna kuta prava, a preostala dva kuta su sukladna je Saccherijev četverokut.
11. *Pseudokvadrat* je četverokut kojem su sve četiri stranice sukladne i sva četiri kuta sukladna. Dokažite bez korištenja aksioma o paralelama:
 - (a) Mjera kutova pseudokvadrata je manja ili jednaka $\pi/2$.
 - (b) Spojnica polovišta nasuprotnih stranica je okomita na te stranice.
 - (c) Spojnice polovišta nasuprotnih stranica međusobno su okomite i raspolavljaju se.
 - (d) Dijagonale pseudokvadrata su simetrale njegovih kutova.