Domaća zadaća 1

Model euklidske ravnine E^2

1. Ako su pravci ℓ i m okomiti, dokažite da se sijeku u jednoj točki.
2. Dokažite: za svaki pravac ℓ i točku T postoji jedinstveni pravac kroz T okomit na ℓ.
3. Definirajte pojam kuta i kutne mjere u E^2.
4. Dokažite da je suma mjera kutova trokuta jednaka π.
5. Dokažite da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki.
6. Dokažite da se visine trokuta sijeku u jednoj točki.

Model sfere S^2

7. Primjerom pokažite da je suma mjera kuteva sfernog trokuta veća od π, tj. izaberite vrhove $A, B, C \in S^2$ i izračunajte $\alpha + \beta + \gamma$.
8. Dokažite sferni teorem o kosinusu: za sferni trokut sa stranicama duljine a, b, c i kutovima mjere α, β, γ vrijedi $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$. Iz toga izvedite sferni Pitagorin teorem.

Prostor Minkowskog

9. Dokažite da vremenski vektori ne mogu biti okomiti, tj. da za svaka dva vremenska vektora u, v vrijedi $b(u, v) \neq 0$. Pokažite primjerom da prostorni vektori u, v i svjetlosni vektori u, v mogu biti okomiti.
10. Dokažite formulu za vektorski produkt u prostoru Minkowskog: ako je $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$, onda je
$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$
Pritom su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ vektori kanonske baze.
11. Neka su u i v vremenski vektori. Dokažite da je tada $u \times v$ nulvektor ili prostorni vektor.
12. Neka su u i v jedinični prostorni vektori. Pokažite primjerom da $u \times v$ može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni vektor.
13. Neka su u i v prostorni vektori takvi da postoji vremenski vektor w okomit na u i na v. Dokažite da je tada $u \times v$ nulvektor ili vremenski vektor.