1	2	3	4	5	6	Σ

Matični Broj ______________ Ime i Prezime ______________

Neeuklidska geometrija - drugi kolokvij, 1.2.2022.

1. (6 bodova) Neka trokut ΔABC ima kutove mjera α, β, γ. Dokažite bez pozivanja na aksiom o paralelama da je $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

2. (6 bodova) Definirajte Saccherijev četverokut. Ako su P i Q polovišta donje i gornje osnovice, bez pozivanja na aksiom o paralelama dokažite da je pravac PQ okomit na pravce na kojima leže donja i gornja osnovica.

3. (6 bodova) Definirajte ultraparalelne pravce u hiperboličnoj ravnini. Dokažite da ultraparalelni pravci imaju jedinstvenu zajedničku normalu.

4. (6 bodova) Neka su ℓ i m ultraparalelni pravci, n njihova zajednička normala, $A = \ell \cap n$, $B = m \cap n$ i P polovište dužine $\overline{AB}$. Dokažite: transverzala t siječe ℓ i m tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni ako i samo ako t prolazi kroz P.

5. (6 bodova) Definirajte Lambertov četverokut. Izrazite površinu Lambertova četverokuta preko duljina stranica a i b nasuprot vrha u kojem nije pravi kut. Koji uvjet zadovoljavaju brojevi $a, b > 0$ ako postoji takav Lambertov četverokut?

6. (5 bodova) Za svaku od sljedećih tvrdnji napišite vrijedi li u euklidskoj ravnini (E: T ili N) i vrijedi li u hiperboličnoj ravnini (H: T ili N).

1. Trokut ima kutove mjera α, β, γ i nasuprotne stranice duljina a, b, c. Tvrdnja $\alpha < \beta < \gamma$ ekvivalentna je s tvrdnjom $a < b < c$.
2. Pravokutni trokut s katetama duljina 2 i 10 ima veću hipotenuzu od pravokutnog trokuta s katetama duljina 6 i 8.
3. Svakom četverokutu moguće je opisati kružnicu.
4. Postoji četverokut koji nije sadržan u unutrašnjosti niti jednog trokuta.
5. Neka su a, b, c tri pravca od kojih se nikoja dva ne sijeku i $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ tri nekolinearne točke. Tada jedna od stranica trokuta ΔABC siječe pravac iz skupa $\{a, b, c\}$ na kojem leži vrh nasuprot te stranice.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje, kalkulator i formule na stražnjoj stranici papira.

Vedran Krčadinac

Hiperbolična trigonometrija

U pravokutnom trokutu ΔABC s pravim kutom pri vrhu C, hipotenuzom duljine c, katetama duljina a, b i nasuprotnim kutovima mjera α, β vrijedi:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}$$

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}$$

U trokutu ΔABC sa stranicama duljina a, b, c i nasuprotnim kutovima mjera α, β, γ vrijedi:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \ \operatorname{sh} c \ \cos\alpha$$

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} c \ \cos\beta$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} b \ \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\operatorname{ch} a - \cos\beta\cos\gamma$$

$$\cos\beta = \sin\alpha\sin\gamma\operatorname{ch} b - \cos\alpha\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\operatorname{ch} c - \cos\alpha\cos\beta$$