Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno-matematički fakultet

Matematički odsjek

NEEUKLIDSKA GEOMETRIJA

Predavanja

Vedran Krčadinac

Akademska godina 2022./2023.

Verzija 9, 8.1.2023.

Sadržaj

Poglavlje 1

Modeli ravninske geometrije

"Ne postoji kraljevski put do geometrije." Euklid, kao odgovor kralju Ptolomeju o lakšem načinu proučavanja matematike od čitanja *Elemenata*.

U prvom poglavlju upoznat ćemo se s modelom hiperbolične ravnine da bismo na lakši način došli do nekih teorema hiperbolične geometrije. Kao uvod podsjetit ćemo se modela euklidske ravnine i sfere u $\mathbb{R}^3$ te obraditi osnove trodimenzionalnog prostora Minkowskog. Glavna literatura za ovo poglavlje je knjiga [21].

1.1 Model euklidske ravnine E^2

Točke euklidske ravnine E^2 su elementi vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. *Pravci* su jednodimenzionalne linearne mnogostrukosti, tj. translati jednodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{R}^2$. To su skupovi oblika $\ell = T + [v]$ za $T, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. Pritom je $[v] = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ potprostor razapet s v kojeg zovemo *smjerom* pravca ℓ.

Propozicija 1.1. *Kroz svake dvije točke $P, Q \in E^2$ prolazi jedinstveni pravac.*

Dokaz. Neka je $v = Q - P$ i neka je

$$\ell = P + [v] = P + \{\alpha(Q - P) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \alpha)P + \alpha Q \mid \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Tvrdimo da je ℓ jedinstveni pravac kojo sadrži P i Q. Za $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ vidimo da je $P \in \ell$ i $Q \in \ell$. Pretpostavimo da je $\ell' = P + [v']$ također pravac koji sadrži P i Q. Onda postoji $\alpha \in R$ takav da je $Q = P + \alpha v'$, tj. $v = Q - P = \alpha v'$. Slijedi $[v] = [v']$ i $\ell = \ell'$. $\square$

U formuli (1.1) vidimo da je spojnica točaka $P, Q \in E^2$ jednaka skupu svih afinih kombinacija tih točaka, tj. linearnih kombinacija sa sumom koeficijenata 1. Za pravce kažemo da su *paralelni* ako se podudaraju ili su disjunktni. Iz prethodne propozicije slijedi da se pravci koji nisu paralelni sijeku u jednoj točki. Naime, kad bi presjek dvaju pravaca $\ell_1 \cap \ell_2$ sadržao dvije točke, imali bismo dva pravca ℓ_1 i ℓ_2 kroz te dvije točke.

Lema 1.2. *Pravci su paralelni ako i samo ako imaju isti smjer.*

Dokaz. Neka su ℓ i m paralelni pravci. Ako se podudaraju očito imaju isti smjer, pa pretpostavimo da su ℓ i m disjunktni i da imaju različite smjerove: $\ell = P+[v]$, $m = Q+[w]$, $[v] \neq [w]$. Tada je skup $\{v, w\}$ linearno nezavisan, tj. baza od $\mathbb{R}^2$, pa postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $Q - P = \alpha v + \beta w$. Vidimo da je $T = P + \alpha v = Q - \beta w$ točka iz presjeka $\ell \cap m$, što je kontradikcija s disjunktnosti. Dakle, ℓ i m imaju isti smjer.

Obrnuto, pretpostavimo da ℓ i m imaju isti smjer $[v]$. Ako postoji točka iz presjeka $T \in \ell \cap m$, onda oba pravca možemo zapisati kao $\ell = m = T + [v]$ pa se podudaraju. Dakle, ℓ i m su disjunktni ili se podudaraju, tj. paralelni su. □

Propozicija 1.3. *Za svaki pravac ℓ i točku T u E^2 postoji jedinstveni pravac kroz T koji je paralelan s ℓ.*

Dokaz. Ako je $\ell = P + [v]$, jedinstvena paralela kroz T sa ℓ očito je $m = T + [v]$. □

Udaljenost točaka iz E^2 definiramo formulom

$$d(P, Q) = \|Q - P\|. \tag{1.2}$$

Pritom je $\|.\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ norma izvedena iz standardnog skalarnog produkta $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Funkcija d zadovoljava aksiome metrike, $\|.\|$ aksiome norme, a $\langle\,.\,,.\rangle$ aksiome skalarnog produkta. Nejednakost trokuta slijedi iz nejednakosti Schwarz-Cauchy-Bunjakovskog.

Teorem 1.4 (Nejednakost S-C-B)**.** *Za svaka dva vektora x, y vrijedi $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Jednakost se dostiže ako i samo ako su x i y proporcionalni.*

Dokaz. Tvrdnja je očito istinita ako je $x = 0$ ili $y = 0$. Pretpostavimo $x, y \neq 0$ i definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \|x+ty\|^2 = \langle x+ty, x+ty\rangle = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|x\|^2$. Funkcija f je kvadratni polinom i zadovoljava $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pa mu je diskriminanta manja ili jednaka od nule: $D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \iff \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \iff |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Vektori x i y su proporcionalni ako i samo ako f ima nultočku, tj. ako je diskriminanta jednaka 0, tj. ako se jednakost dostiže. □

Za vektore x i y kažemo da su *okomiti* ili *ortogonalni* i pišemo $x \perp y$ ako vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$. Potprostori X i Y su *okomiti* ako za svaki $x \in X$ i $y \in Y$ vrijedi $\langle x, y\rangle = 0$. Pravci $\ell = P + [v]$ i $m = Q + [w]$ su *okomiti* ako su njihovi smjerovi okomiti, a to vrijedi ako i samo ako je $v \perp w$.

Propozicija 1.5. *Ako su pravci ℓ i m u E^2 okomiti, onda se sijeku, tj. nisu paralelni.*

Propozicija 1.6. *Za svaki pravac ℓ i točku T u E^2 postoji jedinstveni pravac kroz T koji je okomit na ℓ.*

1.2 Model sfere S^2

Skalarni produkt, normu i metriku u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definiramo analogno kao u $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da je dokaz nejednakosti Schwarz-Cauchy-Bunjakovskog isti (teorem 1.4). Mjeru kuta između nenul vektora $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiramo kao

$$\measuredangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Po nejednakosti S-C-B, izraz od kojeg računamo arkus kosinus je između -1 i 1, pa je definicija dobra.

Sferu u $\mathbb{R}^3$ čine svi jedinični vektori:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

Na sferi ulogu pravaca imaju velike kružnice, tj. presjeci sfere s ravninama kroz ishodište. Jednadžbe takvih ravnina su oblika $\langle a, x \rangle = 0$, za $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Propozicija 1.7. *Za svake dvije točke $P, Q \in S^2$ postoji velika kružnica koja ih sadrži. Ona je jedinstvena osim ako su P i Q antipodalne ($Q = -P$), a u tom slučaju postoji beskonačno mnogo takvih kružnica.*

Dokaz. Neka je O ishodište, tj. središte sfere S^2. Ako P i Q nisu antipodalne, onda su točke O, P, Q nekolinearne i određuju jedinstvenu ravninu. Presjek te ravnine sa sferom je jedinstvena velika kružnica kroz P i Q. Ako su P i Q antipodalne, točke O, P, Q leže na pravcu. Svaka ravnina koja sadrži taj pravac određuje veliku kružnicu kroz P i Q. □

Jednadžba velike kružnice kroz $P, Q \in S^2$ je $\langle P \times Q, x \rangle = 0$, pri čemu *vektorski produkt* u $\mathbb{R}^3$ računamo Laplaceovim razvojem sljedeće determinante po prvom retku:

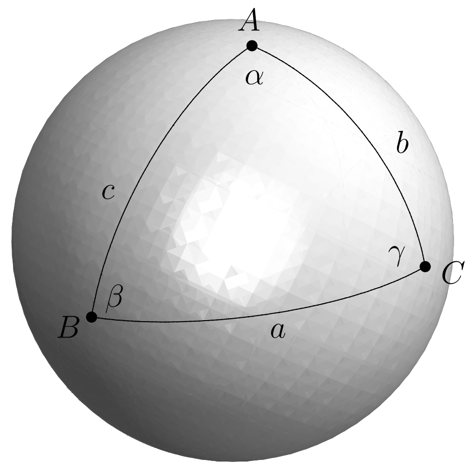
$$P \times Q = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Ovdje su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ vektori kanonske baze, a p_i i q_j su komponente vektora P i Q. Vektorski produkt ima svojstva:

1. $P \times Q$ je okomit na P i Q,
2. $(\alpha P_1 + \beta P_2) \times Q = \alpha(P_1 \times Q) + \beta(P_2 \times Q)$,
3. $Q \times P = -P \times Q$,
4. $P \times Q = 0$ ako i samo ako su P i Q proporcionalni.

Presjek dvije velike kružnice zadanih jednadžbama $\langle a, x \rangle = 0$ i $\langle b, x \rangle = 0$ je par antipodalnih točaka sfere

$$\pm \frac{a \times b}{\|a \times b\|}.$$



Slika 1.1: Sferni trokut.

Dakle, u sfernoj geometriji nema paralelnih pravaca. Identificiranjem antipodalnih točaka sfere dobivamo projektivnu ravninu $PG(2, \mathbb{R})$ u kojoj kroz svake dvije točke prolazi jedinstveni pravac i svaka dva pravca sijeku se u jedinstvenoj točki.

Udaljenost točaka na sferi S^2 ne podudara se s udaljenosti u ambijentnom prostoru $\mathbb{R}^3$. Želimo da $d(P, Q)$ bude najkraća udaljenost od P do Q kad se gibamo po sferi, tj. duljina dijela velike kružnice kroz P i Q. To se podudara s mjerom kuta između vektora $\measuredangle(P, Q)$. Budući da je $\|P\| = \|Q\| = 1$, računamo je po formuli

$$d(P, Q) = \arccos\langle P, Q\rangle. \tag{1.4}$$

Najveću moguću udaljenost postižu antipodalne točke: $d(P, -P) = \arccos(-1) = \pi$.

Sferni trokut čine tri nekolinearne točke $A, B, C \in S^2$, tj. točke koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Duljne stranica trokuta označavamo $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$. Kutevi trokuta su kutevi između odgovarajućih velikih kružnica BC, AC i AB. Njihove mjere odgovaraju mjerama kuteva između pripadnih ravnina u $\mathbb{R}^3$, tj. njihovih vektora normale $B \times C$, $A \times C$ i $A \times B$. Računamo ih po formulama

$$\alpha = \arccos \frac{\langle A \times B, A \times C\rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|}$$

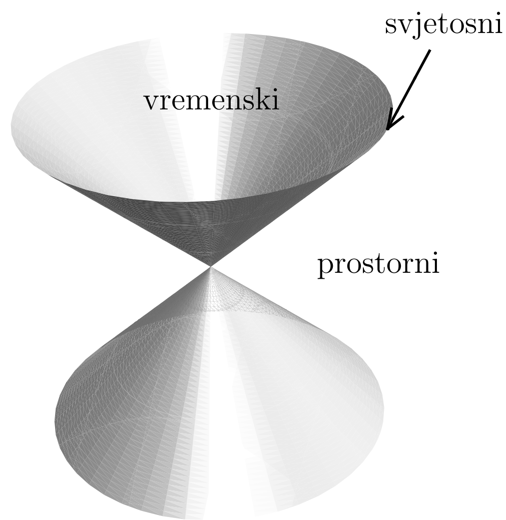
i analogno za β i γ. Suma mjera kuteva sfernog trokuta veća je od π.

1.3 Prostor Minkowskog

Model hiperbolične ravnine možemo izgraditi kao sferu u $\mathbb{R}^3$ imaginarnog polumjera $i = \sqrt{-1}$. Za to trebamo modificirati standardni skalarni produkt promjenom predznaka zadnjeg pribrojnika:

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Time nismo pokvarili bilinearnost i simetričnost:



Slika 1.2: Svjetlosni konus u prostoru Minkowskog.

- $b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\, b(x_1, y) + \beta\, b(x_2, y)$,
- $b(x, y) = b(y, x)$.

Svojstvo pozitivnosti ne vrijedi za modificirani skalarni produkt: postoje vektori $x \in \mathbb{R}^3$ takvi da je $b(x, x) < 0$ i vektori $x \neq 0$ takvi da je $b(x, x) = 0$. Modificirani skalarni produkt ipak zadovoljava ovaj uvjet nedegeneriranosti:

- ako je $b(x, y) = 0$ za sve $y \in \mathbb{R}^3$, onda je $x = 0$.

Ako je $b(x, x) > 0$, za x kažemo da je *prostorni vektor*. Ako je $b(x, x) < 0$ kažemo da je *vremenski vektor*, a u slučaju $b(x, x) = 0$, $x \neq 0$ kažemo da je *svjetlosni vektor*. Vektorski prostor s takvim skalarnim produktom nazivamo *prostorom Minkowskog*. On predstavlja prostorno-vremensku geometriju Einsteinove specijalne teorije relativnosti [7].

Za model hiperbolične ravnine trebamo vektorski produkt u prostoru Minkowskog. Želimo modificirati standardni vektorski produkt u skladu s modifikacijom skalarnog produkta. Promotrimo vezu između standardnog vektorskog i standardnog skalarnog produkta: za $u, v \in \mathbb{R}^3$, vektorski produkt $u \times v$ je jedinstveni vektor $z \in \mathbb{R}^3$ za koji vrijedi

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \langle z, x \rangle, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Preslikavanje $x \mapsto \det(x, u, v)$ je linearni funkcional na $\mathbb{R}^3$, pa ga po Rieszovu teoremu možemo reprezentirati kao $x \mapsto \langle z, x \rangle$. Raspisivanjem vidimo da koordinate od $z = u \times v$ odgovaraju formuli (1.3).

Modificirani vektorski produkt u prostoru Minkowskog definiramo analogno: $u \times v$ je jedinstveni vektor $z \in \mathbb{R}^3$ za koji vrijedi

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = b(z, x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.5}$$

Računamo ga kao determinantu

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

Vidimo da se od standardnog vektorskog produkta razlikuje po predznaku zadnje koordinate. Osnovna svojstva modificiranog vektorskog produkta su ista kao standardnog vektorskog produkta.

Propozicija 1.8. *Za sve $u, v, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi*

1. $b(u \times v, u) = b(u \times v, v) = 0$,
2. $(\alpha u_1 + \beta u_2) \times v = \alpha(u_1 \times v) + \beta(u_2 \times v)$,
3. $v \times u = -u \times v$,
4. $u \times v = 0$ *ako i samo ako su u i v proporcionalni.*

Dokaz.

1. Označimo s $\det(x, y, z)$ determinantu matrice kojoj su reci vektori $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Onda po formuli (1.5) vrijedi $b(u \times v, x) = \det(x, u, v)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Posebno, za $x = u$ slijedi $b(u \times v, u) = \det(u, u, v) = 0$, a za $x = v$ dobivamo $b(u \times v, v) = \det(v, u, v) = 0$.

2. Linearnost vektorskog produkta u prvom faktoru slijedi iz multilinearnosti determinante (linearnosti u pojedinim varijablama, tj. recima matrice) i bilinearnosti modificiranog skalarnog produkta: $b((\alpha u_1 + \beta u_2) \times v, x) = \det(x, \alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha \det(x, u_1, v) + \beta \det(x, u_2, v) = \alpha b(u_1 \times v, x) + \beta b(u_2 \times v, x) = b(\alpha(u_1 \times v) + \beta(u_2 \times v), x)$. Ovo vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}^3$, pa zbog nedegeneriranosti od b zaključujemo $(\alpha u_1 + \beta u_2) \times v = \alpha(u_1 \times v) + \beta(u_2 \times v)$.

3. Zamjena dvaju redaka mijenja predznak determinante, pa vrijedi $b(v \times u, x) = \det(x, v, u) = -\det(x, u, v) = -b(u \times v, x) = b(-u \times v, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Zbog nedegeneriranosti od b slijedi $v \times u = -u \times v$.

4. Ako su u i v proporcionalni, vrijedi $b(u \times v, x) = \det(x, u, v) = \det(x, u, \alpha u) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Zbog nedegeneriranosti od b slijedi $u \times v = 0$. Obrnuto, ako je $u \times v = 0$, vrijedi $\det(x, u, v) = b(0, x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Posebno, za $x = e_1$ i $x = e_3$ dobivamo $u_2 v_3 - u_3 v_2 = 0$ i $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$. Iz toga slijedi $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3} = \alpha$, tj. $v = \alpha u$ ako su nazivnici različiti od nule. U slučaju kad su neke od komponenta vektora u jednake nuli također se vidi da vrijedi proporcionalnost.

□

Primijetimo da iz svojstva 2. i 3. slijedi linearnost vektorskog produkta u drugom faktoru. Još jedno zajedničko svojstvo modificiranog i standardnog vektorskog produkta je tzv. mješoviti produkt.

Propozicija 1.9. *Za sve $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ vrijedi $b(u \times v, w) = b(u, v \times w)$.*

Dokaz. $b(u \times v, w) = \det(w, u, v) = -\det(u, w, v) = \det(u, v, w) = b(v \times w, u) = b(u, v \times w)$. $\square$

U standardnom unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ apsolutna vrijednost izraza $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$ predstavlja volumen paralelepipeda razapetog vektorima u, v i w. Vektorski produkt nije asocijativan. Za produkt triju vektora vrijedi sljedeća važna formula.

Teorem 1.10. *$(u \times v) \times w = -b(u, w)v + b(v, w)u$.*

Dokaz. $\square$

Analogna formula vrijedi i za standardni vektorski i skalarni produkt, ali sa suprotnim predznakom na desnoj strani: $(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$. Iz teorema 1.10 slijedi takozvani Lagrangeov identitet.

Teorem 1.11 (Lagrangeov identitet)**.** *$b(u \times v, u \times v) = b(u, v)^2 - b(u, u) \cdot b(v, v)$.*

Dokaz. $b(u \times v, u \times v) =$ (prop. 1.9) $= b((u \times v) \times u, v) =$ (tm. 1.10) $= b(\,-b(u, u)v + b(v, u)u,\ v) = -b(u, u) \cdot b(v, v) + b(v, u) \cdot b(u, v) = b(u, v)^2 - b(u, u) \cdot b(v, v)$. $\square$

U standardnom unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ Lagrangeov identitet glasi $\langle u \times v, u \times v\rangle = \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2$, što možemo zapisati kao $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2$. Budući da je $\|u \times v\|^2 \geq 0$, iz toga odmah slijedi nejednakost S-C-B: $\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Vidimo da je lijeva strana manja od desne za $\|u \times v\|^2$, a podudaraju se ako i samo ako je $u \times v = 0$, tj. ako i samo ako su u i v proporcionalni. Geometrijski smisao norme $\|u \times v\|$ je površina paralelograma razapetog s u i v. Vektorski produkt definiran je samo na $\mathbb{R}^3$, ali Lagrangeov identitet možemo generalizirati na $\mathbb{R}^n$ (zadatak 1.9).

Iz teorema 1.11 vidimo da nejednakost S-C-B ne vrijedi u prostoru Minkowskog. Vektorski produkt $u \times v$ može biti prostorni ili vremenski vektor, pa njegov skalarni kvadrat može biti pozitivan ili negativan. Kasnije ćemo vidjeti kako treba modificirati nejednakost S-C-B da bi vrijedila u prostoru Minkowskog.

Baze prostora $\mathbb{R}^3$ dobivamo pomoću standardnog vektorskog produkta na sljedeći način. Ako je $u \times v \neq 0$, tj. u i v nisu proporcionalni, onda je $\{u, v, u \times v\}$ baza. Ta tvrdnja ne vrijedi za vektorski produkt u prostoru Minkowskog. Npr. za $u = (1, 0, 0)$ i $v = (0, 1, 1)$ je $u \times v = (0, -1, -1) \neq 0$, ali $\{u, v, u \times v\}$ nije baza jer su v i $u \times v$ proporcionalni. Tvrdnja ipak vrijedi ako pretpostavimo da $u \times v$ nije nulvektor niti svjetlosni vektor (zadatak 1.11). U unitarnom prostoru praktičnije je raditi s ortonormiranim bazama.

Iz formule $\|x\| = \sqrt{b(x, x)}$ slijedi da je norma prostornog vektora pozitivan realan broj, norma svjetlosnog vektora je nula, a vremenskog vektora je čisti imaginarni broj oblika $r \cdot \sqrt{-1}$ za $r > 0$. Da bismo izbjegli kompleksne brojeve, koristit ćemo se formulom $\|x\| = \sqrt{|b(x, x)|}$. Tada možemo reći da je vektor *normiran* ili *jedinični* ako je $\|x\| = 1$. Za prostorne normirane vektore je $b(x, x) = 1$, za vremenske je $b(x, x) = -1$, a svjetlosni vektori ne mogu biti normirani. Za skup vektora $\{a_1, a_2, \ldots\}$ kažemo da je *ortonormiran* ako vrijedi

$$b(a_i, a_j) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j, \\ \pm 1, & \text{za } i = j. \end{cases}$$

Propozicija 1.12. *Svaki ortonormiran skup triju vektora $\{a_1, a_2, a_3\}$ je baza od $\mathbb{R}^3$.*

Dokaz. Dovoljno je provjeriti linearnu nezavisnost. Pretpostavimo $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ i pomnožimo "skalarno" s a_i, pa dobijemo $\alpha_i b(a_i, a_i) = 0$. Budući da je $b(a_i, a_i) = \pm 1$, slijedi $\alpha_i = 0$, za $i = 1, 2, 3$. □

Ortonormirana baza ne sadrži svjetlosne vektore, jer oni ne mogu biti normirani. Kanonska baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ sadrži dva prostorna vektora e_1, e_2 i jedan vremenski vektor e_3. Tako izgleda svaka ortonormirana baza prostora Minkowskog.

Propozicija 1.13. *Svaka ortonormirana baza prostora Minkowskog sastoji se od dva prostorna i jednog vremenskog vektora.*

Dokaz. Neka je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirana baza. Sva tri vektora a_1, a_2, a_3 ne mogu biti prostorni, jer bi tada svaki vektor $x \neq 0$ bio prostorni: zapišemo $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ i izračunamo $b(x, x) = b(\sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 > 0$. Na isti način vidimo da sva tri vektora a_1, a_2, a_3 ne mogu biti vremenski. Dakle, bar jedan vektor baze je prostorni, recimo a_1, i bar jedan je vremenski, recimo a_3. Treba pokazati da je tada a_2 prostorni. Vektorski produkt $a_1 \times a_3$ je prostorni zbog Lagrangeova identiteta: $b(a_1 \times a_3, a_1 \times a_3) = b(a_1, a_3)^2 - b(a_1, a_1) \cdot b(a_2, a_2) = 0^2 - 1 \cdot (-1) = 1$. S druge strane, po teoremu 1.10 vrijedi $(a_1 \times a_3) \times a_2 = -b(a_1, a_2) a_3 + b(a_3, a_2) a_1 = -0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_1 = 0$. Po propoziciji 1.8 vektori $a_1 \times a_3$ i a_2 su proporcionalni, a nenul vektor proporcionalan prostornom vektoru je i sam prostorni. □

Propozicija 1.14. *Ako je $\{u, v\}$ ortonormiran skup od dva vektora, onda je $\{u, v, u \times v\}$ ortonormirana baza prostora Minkowskog.*

Dokaz. Ortogonalnost slijedi iz propozicije 1.8. Normiranonst $u \times v$ slijedi iz Lagrangeova identiteta isto kao u prethodnom dokazu: $b(u \times v, u \times v) = b(u, v)^2 - b(u, u) \cdot b(v, v) = 0^2 - (\pm 1) \cdot (\pm 1) = \pm 1$. □

Dakle, svaki ortonormirani skup od dva vektora možemo dopuniti do ortonormirane baze. Tvrdnja vrijedi i za jedan normirani vektor.

Propozicija 1.15. *Svaki normirani vektor prostora Minkowskog sadržan je u nekoj ortonormiranoj bazi.*

Dokaz. Neka je u normirani vektor. Pretpostavimo da je prostorni, tj. $b(u, u) = 1$. Uzmimo bilo koji normirani vremenski vektor, recimo $v = e_3$. Ako su u i v okomiti, dopunimo $\{u, v\}$ do baze kao u propoziciji 1.14. U suprotnom je $b(u, v) \neq 0$, pa gledamo $\overline{v} = u + \alpha v$ i izaberemo α tako da u i $\overline{v}$ budu okomiti: $b(u, u + \alpha v) = b(u, u) + \alpha\, b(u, v) = 1 + \alpha\, b(u, v) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{b(u,v)}$. Zatim normiramo $\overline{v}$ i primijenimo propoziciju 1.14. Na analogni način dopunimo u do ortonormirane baze ako je vremenski, tj. $b(u, u) = -1$. □

Propozicija 1.16. *Ako je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortonormirana baza prostora Minkowskog, onda za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^3$ vrijedi*

$$x = \sum_{i=1}^{3} b(x, a_i)\, b(a_i, a_i)\, a_i.$$

Dokaz. Zapišemo $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ i pomnožimo "skalarno" s a_i: $b(x, a_i) = \alpha_i\, b(a_i, a_i)$. Budući da je $b(a_i, a_i) = \pm 1$, iz toga slijedi $\alpha_i = b(x, a_i)\, b(a_i, a_i)$. □

Promotrimo sada kako treba modificirati nejednakosti Schwarz-Cauchy-Bunjakovskog da bi vrijedila u prostoru Minkowskog.

Teorem 1.17 (Nejednakost S-C-B za prostorne vektore)**.** *Neka su u i v prostorni vektori takvi da je $u \times v$ vremenski vektor. Tada vrijedi $b(u, v)^2 < b(u, u)\, b(v, v)$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz Lagrangeova identiteta (teorema 1.11). □

Vektorski produkt prostornih vektora $u \times v$ može biti vremenski, prostorni ili svjetlosni vektor (zadatak 1.15). Možemo oslabiti pretpostavku teorema i tražiti da vrijedi $b(u \times v, u \times v) \leq 0$ (tj. da $u \times v$ bude vremenski vektor, svjetlosni vektor ili nulvektor). Tada vrijedi nejednakost $b(u, v)^2 \leq b(u, u)\, b(v, v)$, ali ne vrijedi karakterizacija dostizanja jednakosti ako i samo ako su u i v proporcionalni. Npr. za $u = (1, 1, -1)$ i $v = (0, 1, 0)$ vrijedi $b(u, u) = b(v, v) = b(u, v) = 1$ i jednakost se dostiže, ali u i v nisu proporcionalni. Za vremenske vektore u i v ne trebamo pretpostavku o tipu vektorskog produkta $u \times v$ i vrijedi karakterizacija jednakosti. Nejednakost S-C-B je obrnuta nego u standardnom unitarnom prostoru.

Teorem 1.18 (Nejednakost S-C-B za vremenske vektore)**.** *Neka su u i v vremenski vektori. Tada vrijedi $b(u, v)^2 \geq b(u, u)\, b(v, v)$ i jednakost se dostiže ako i samo ako su u i v proporcionalni.*

Dokaz. Tvrdimo da je vektorski produkt $w = u \times v$ prostorni vektor ili nulvektor. Vektor $a_3 = \frac{u}{\|u\|}$ je jedinični vremenski vektor i po propoziciji 1.15 možemo ga dopuniti do ortonormirane baze $\{a_1, a_2, a_3\}$. Po propoziciji 1.13 vektori a_1 i a_2 su prostorni. Raspišimo vektorski produkt u toj bazi: $w = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Skalarnim množenjem s a_3 vidimo da je $\alpha_3 = 0$, tj. $w = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Iz toga slijedi da je w prostorni vektor ili nulvektor ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. U prvom slučaju iz Lagrangeova identiteta (teorema 1.11) dobivamo $b(u, v)^2 > b(u, u)\, b(v, v)$, a u drugom slučaju dobivamo jednakost $b(u, v)^2 = b(u, u)\, b(v, v)$. □

Korolar 1.19. *Za svaka dva jedinična vremenska vektora u i v vrijedi $|b(u, v)| \geq 1$.*

Predznak produkta $b(u, v)$ jediničnih vremenskih vektora prepoznajemo po njihovim trećim koordinatama.

Lema 1.20. *Za jedinične vremenske vektore $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$ vrijedi $b(u, v) \geq 1$ ako i samo ako je $u_3 \cdot v_3 < 0$, odnosno $b(u, v) \leq -1$ ako i samo ako je $u_3 \cdot v_3 > 0$.*

Dokaz. Označimo $\overline{u} = (u_1, u_2)$ i $\overline{v} = (v_1, v_2)$. To su vektori iz $\mathbb{R}^2$ i vrijedi $b(u, v) = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle - u_3 v_3$, gdje je $\langle\, .\, , .\, \rangle$ standardni skalarni produkt u $\mathbb{R}^2$. Za standarnu normu tih vektora u $\mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(\|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|)^2 \geq 0,$$

a jednakost dostiže ako i samo ako je $\overline{u} = \overline{v} = 0$. To je ekvivalentno s

$$\|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 \geq -2\,\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|.$$

S lijeve i desne strane dodamo $1 + \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2$ i faktoriziramo:

$$\left(1 + \|\overline{u}\|^2\right)\left(1 + \|\overline{v}\|^2\right) \geq \left(\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| - 1\right)^2.$$

Sad iskoristimo $b(u,u) = \|\overline{u}\|^2 - u_3^2 = -1$ da bismo izrazili $1 + \|\overline{u}\|^2 = u_3^2$ i analogno $1 + \|\overline{v}\|^2 = v_3^2$. Gornja nejednakost prelazi u

$$\left(\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| - 1\right)^2 \leq u_3^2 v_3^2, \tag{1.7}$$

pri čemu se jednakost i dalje dostiže ako i samo ako je $\overline{u} = \overline{v} = 0$. Iz ove nejednakosti dokazat ćemo prvu ekvivalenciju leme.

($\Rightarrow$) Neka je $b(u,v) \geq 1$, tj. $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle - u_3 v_3 \geq 1$. Iz nejednakosti S-C-B u $\mathbb{R}^2$ dobijemo

$$u_3 v_3 \leq \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle - 1 \leq \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| - 1. \tag{1.8}$$

Kad bi vrijedilo $u_3 v_3 \geq 0$, mogli bismo kvadrirati ovu nejednakost i dobili bismo jednakost u (1.7). Tada bismo imali $\overline{u} = \overline{v} = 0$, što uvrštavanjem u (1.8) daje $u_3 v_3 \leq -1$, kontradikciju. Dakle, mora vrijediti $u_3 v_3 < 0$.

($\Leftarrow$) Obrnuto, neka vrijedi $u_3 v_3 < 0$. Kad bi vrijedilo $b(u,v) \leq -1$, onda bismo zbog bilinearnosti imali $b(-u,v) \geq 1$. Istim zaključivanjem kao u prethodnom smjeru dobili bismo $(-u_3)v_3 < 0$, kontradikciju s pretpostavkom. Dakle, mora vrijediti $b(u,v) \geq 1$. $\square$

1.4 Model hiperbolične ravnine H^2

Točke hiperbolične ravnine H^2 čine jedinični vremenski vektori u prostoru Minkowskog s pozitivnom trećom koordinatom:

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid b(x,x) = -1,\ x_3 > 0\}.$$

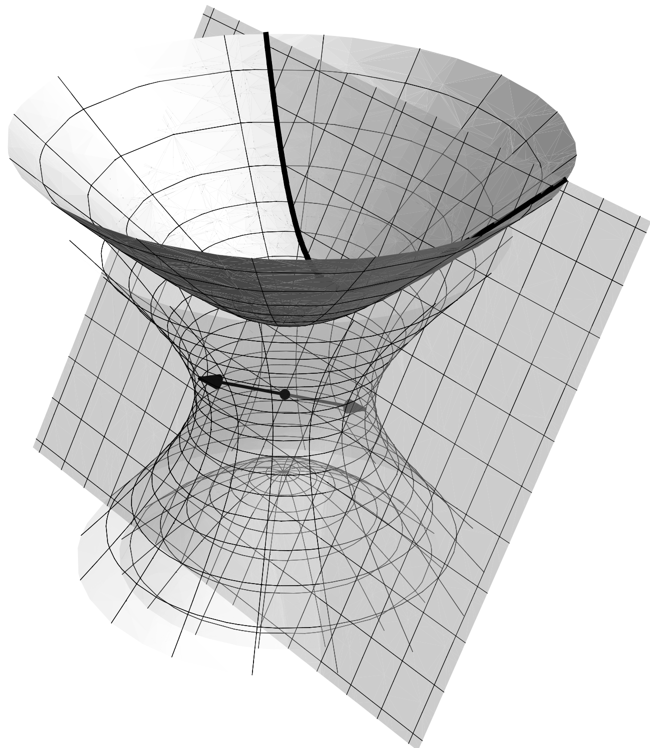
Pravci su skupovi točaka koje zadovoljavaju jednadžbe oblika $b(n,x) = 0$ za neki jedinični prostorni vektor n. Taj vektor zovemo *polom* ili *vektorom normale* pravca

$$\ell = \{x \in H^2 \mid b(n,x) = 0\}.$$

Svaki takav skup je neprazan jer po propoziciji 1.15 vektor n možemo dopuniti do ortonormirane baze $\{n, x, y\}$ prostora Minkowskog. Po propoziciji 1.13, jedan od vektora x, y je vremenski. Ako je npr. x vremenski, onda je x ili $-x$ točka u H^2 koja leži na pravcu ℓ.

Uvjet $b(x,x) = -1 \iff x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ predstavlja jednadžbu dvoplohnog hiperboloida u $\mathbb{R}^3$ s rotacijskom osi x_3. Točke iz H^2 pripadaju gornjoj plohi tog hiperboloida. S druge strane, uvjet $b(x,x) = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ predstavlja jednadžbu jednoplohnog hiperboloida u $\mathbb{R}^3$ s rotacijskom osi x_3. Polovi pravaca u modelu H^2 pripadaju tom hiperboloidu. Jedan pravac ima dva suprotna pola n i $-n$.

Propozicija 1.21. *Kroz svake dvije točke $P, Q \in H^2$ prolazi jedinstveni pravac.*



Slika 1.3: Model hiperbolične ravnine u prostoru Minkowskog.

Dokaz. U dokazu teorema 1.18 vidjeli smo da je $P \times Q$ prostorni vektor ili nulvektor. Drugi slučaj po propoziciji 1.8 nastupa samo ako su P i Q proporcionalni, a to bi zbog normiranosti i pozitivnih trećih koordinata značilo da je $P = Q$. Dakle, $P \times Q$ je prostorni, a $n = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}$ je pol pravca koji sadrži P i Q (jedinični prostorni vektor okomit na P i Q). Ako je n' neki drugi takav vektor, iz teorema 1.10 slijedi $(P \times Q) \times n' = -b(P, n')\, Q + b(Q, n')\, P = 0 \cdot Q + 0 \cdot P = 0$, pa su $P \times Q$ i n' proporcionalni. To znači da su n i n' polovi istog pravca. Time smo dokazali egzistenciju i jedinstvenost pravca kroz P i Q. $\square$

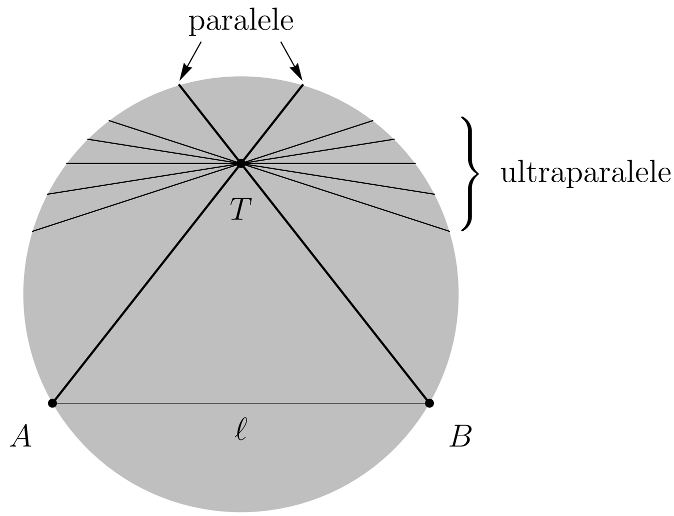
Za dokaz jedinstvenosti koristili smo argument na koji ćemo se često pozivati:

Lema 1.22. *Ako je vektor x okomit na y i z, onda je proporcionalan s vektorskim produktom $y \times z$.*

Neka su ℓ_1, ℓ_2 dva pravca s polovima n_1, n_2. Za ta dva pravca kažemo da

- *se sijeku*, ako je $n_1 \times n_2$ vremenski vektor,
- *su paralelni*, ako je $n_1 \times n_2$ svjetlosni vektor,
- *su ultraparalelni*, ako je $n_1 \times n_2$ prostorni vektor.

Propozicija 1.23. *Pravci koji se sijeku imaju točno jednu zajedničku točku.*



Slika 1.4: Paralele i ultraparalele u Beltrami-Kleinovu modelu.

Dokaz. Po pretpostavci je $n_1 \times n_2$ vremenski vektor. Stoga je $P = \pm\frac{n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$ jedinični vremenski vektor okomit na n_1 i n_2. Ako predznak odaberemo tako da treća koordinata bude pozitivna, imamo točku $P \in H^2$ koja leži na ℓ_1 i ℓ_2. Ako je i Q točka iz presjeka $\ell_1 \cap \ell_2$, onda je vektor Q okomit na polove n_1 i n_2. Po lemi 1.22 proporcionalan je s $n_1 \times n_2$, pa i s P. Zbog normiranosti i pozitivnosti trećih koordinata slijedi $Q = P$. □

Propozicija 1.24. *Pravci koji su paralelni ili ultraparalelni nemaju zajedničkih točaka.*

Dokaz. U dokazu prethodne propozicije vidjeli smo da je točka presjeka proporcionalna s $n_1 \times n_2$. Tada bi $n_1 \times n_2$ bio vremenski vektor, a pretpostavili smo da je svjetlosni ili prostorni. □

Propozicija 1.25. *Za svaki pravac ℓ i točku T u H^2 koji nisu incidentni postoje točno dva pravca kroz T paralelna s ℓ i beskonačno mnogo pravaca kroz T ultraparalelnih s ℓ.*

U modelu H^2 nije lako direktno provjeriti ovo važno svojstvo hiperbolične ravnine. Lakše ga je provjeriti u *Beltrami-Kleinovu modelu*, u kojem su točke elementi otvorenog jediničnog kruga u $\mathbb{R}^2$ s centrom u ishodištu, a pravci su tetive tog kruga. Paralelni pravci odgovaraju tetivama koje se sijeku na rubu kruga (kružnici). Ultraparalelni pravci odgovaraju tetivama koje leže na pravcima u $\mathbb{R}^2$ koji se sijeku izvan zatvorenog kruga ili su paralelni. Ako imamo točku T i pravac $\ell = \overline{AB}$ koji nisu incidentni (A i B su točke na kružnici), onda su tetive koje leže na pravcima TA i TB dvije paralele kroz T sa ℓ, a tetive na pravcima kroz T između ta dva pravca su beskonačno mnogo ultraparalela (slika 1.4). Propoziciju 1.25 dokazujemo uspostavljanjem izomorfizma između modela H^2 i Beltrami-Kleinova modela.

Dokaz propozicije 1.25. Definiramo projekciju $\Pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$, $\Pi(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$. Vektori iz domene su proporcionalni ako i samo ako ih Π preslikava u istu točku iz $\mathbb{R}^2$. Vidjeli smo da je za vektore iz H^2 proporcionalnost ekvivalentna podudaranju, pa je restrikcija Π na H^2 injektivna. Vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ je vremenski ako i samo ako je $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0 \iff (\frac{x_1}{x_3})^2 + (\frac{x_1}{x_3})^2 < 1 \iff \|\Pi(x)\| < 1$. Zato Π preslikava H^2 bijektivno na jedinični otvoreni krug u $\mathbb{R}^2$. Pravac $\ell = \{x \in H^2 \mid b(n,x) = 0\}$ preslikava se u tetivu kruga: $b(n,x) = 0 \iff n_1x_1 + n_2x_2 - n_3x_3 = 0 \iff n_1 \frac{x_1}{x_3} + n_2 \frac{x_2}{x_3} = n_3 \iff n_1 \Pi_1(x) + n_2 \Pi_2(x) = n_3$. Odgovarajuća tetiva ima jednadžbu $n_1 x + n_2 y = n_3$ (ovo je jednadžba pravca u $\mathbb{R}^2$).

Uzmimo sada polove n i m dvaju pravaca iz H^2 i promotrimo sjecište odgovarajućih pravaca u $\mathbb{R}^2$. To je rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$n_1 x + n_2 y = n_3$$
$$m_1 x + m_2 y = m_3$$

koje po Cramerovom pravilu ima koordinate

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} n_3 & n_2 \\ m_3 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} n_1 & n_3 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}} \right).$$

Točka s ovim koordinatama leži unutar jedinične kružnice ($x^2 + y^2 < 1$), na kružnici ($x^2 + y^2 = 1$) ili izvan kružnice ($x^2 + y^2 > 1$) ako i samo ako je izraz

$$\begin{vmatrix} n_3 & n_2 \\ m_3 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & n_3 \\ m_1 & m_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}^2$$

negativan, jednak 0 ili pozitivan. Prema formuli (1.6) ovaj izraz je jednak $b(n \times m, n \times m)$. Dakle, vektor $n \times m$ je vremenski i pravci u H^2 se sijeku ako i samo ako se odgovarajuće tetive sijeku unutar jedinične kružnice. Vektor $n \times m$ je svjetlosni i pravci u H^2 su paralelni ako i samo ako se odgovarajuće tetive sijeku na jediničnoj kružnici. Vektor $n \times m$ je prostorni i pravci u H^2 su ultraparalelni ako i samo ako se odgovarajuće tetive sijeku izvan kružnice. Zadnji slučaj uključuje mogućnost da tetive leže na paralelnim pravcima u $\mathbb{R}^2$, što je ekvivalentno s $\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = 0$.

Sada znamo da su paralele i ultraparalele s pravcem ℓ kroz točku T ekvivalentne s tetivama u Beltrami-Kleinovu modelu koje se sijeku na jediničnoj kružnici ili izvan jedinične kružnice. Sa slike 1.4 vidimo da imamo dvije paralele i beskonačno mnogo ultraparalela. □

Za pravce ℓ_1, ℓ_2 u modelu H^2 s polovima n_1, n_2 kažemo da su *okomiti* ili *ortogonalni* i pišemo $\ell_1 \perp \ell_2$ ako vrijedi $b(n_1, n_2) = 0$.

Propozicija 1.26. *Ako su pravci ℓ_1 i ℓ_2 u H^2 okomiti, onda se sijeku.*

Dokaz. Polovi okomitih pravaca čine ortonormiran skup $\{n_1, n_2\}$. Po propoziciji 1.14 skup $\{n_1, n_2, n_1 \times n_2\}$ je ortonormirana baza, a po propoziciji 1.13 treći vektor $n_1 \times n_2$ je vremenski. Zato se pravci ℓ_1 i ℓ_2 sijeku. □

Propozicija 1.27. *Za svaki pravac ℓ i točku T u H^2 postoji jedinstveni pravac kroz T koji je okomit na ℓ.*

Dokaz. Neka je n pol pravca ℓ. Vektorski produkt $n \times T$ nije nulvektor, jer bi tada n i T bili proporcionalni. To nije moguće jer je n prostorni, a T vremenski vektor. Po zadatku 1.13 je $n \times T$ prostorni vektor, zbog okomitosti na vremenski vektor T. Stoga je $m = \frac{n \times T}{\|n \times T\|}$ jedinični prostorni vektor koji je okomit na n i T. To je pol okomice na ℓ kroz T. Jedinstvenost okomice slijedi iz leme 1.22. $\square$

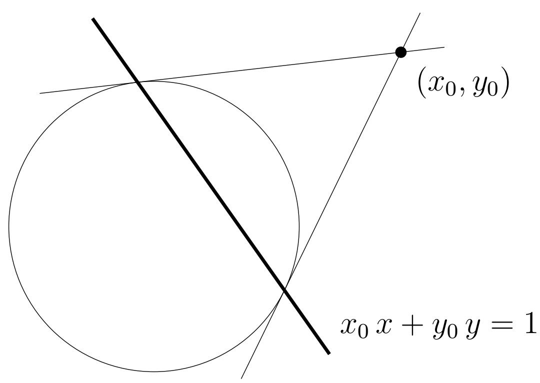
Primijetimo da su prethodne dvije propozicije o okomitosti u H^2 iste kao propozicije 1.5 i 1.6 o okomitosti u E^2. Sljedeća propozicija pokazuje da se paralelnost i ultraparalelnost u H^2 razlikuju od paralelnosti u E^2.

Propozicija 1.28. *Ako su dva pravca u H^2 ultraparalelni, onda imaju jedinstvenu zajedničku normalu. Obrnuto, ako dva pravca u H^2 imaju zajedničku normalu, onda su ultraparalelni.*

Dokaz. Neka su n_1 i n_2 polovi pravaca ℓ_1 i ℓ_2. Ako su ℓ_1 i ℓ_2 ultraparalelni, $n_1 \times n_2$ je prostorni, pa je $\frac{n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$ pol pravca okomitog na ℓ_1 i ℓ_2 (zajedničke normale). Jedinstvenost zajedničke normale slijedi iz leme 1.22. Obrnuto, ako ℓ_1 i ℓ_2 imaju zajedničku normalu s polom n, tada je $n_1 \times n_2$ proporcionalan s n i zato je prostorni, pa su ℓ_1 i ℓ_2 ultraparalelni. $\square$

Paralelnost pravaca u euklidskoj ravnini E^2 ekvivalentno je postojanju zajedničke normale, ali ona nije jedinstvena nego postoji beskonačno mnogo zajedničkih normala koje su međusobno paralelne. U hiperboličnoj ravnini H^2 ultraparalelni pravci imaju samo jednu zajedničku normalu, a paralelni pravci nemaju zajedničku normalu.

Promotrimo kako treba definirati okomitost pravaca u Beltrami-Kleinovu modelu hiperbolične ravnine. Polara točke $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ obzirom na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ je pravac s jednadžbom $x_0\, x + y_0\, y = 1$. Obratno, svaki pravac koji ne prolazi kroz ishodište ima jednadžbu tog oblika, pa je njegov pol točka (x_0, y_0). Za točke na kružnici polara je tangenta u toj točki, a za točke izvan kružnice polara je spojnica dirališta tangenti spuštenih iz (x_0, y_0) na kružnicu (slika 1.5).



Slika 1.5: Pol i polara u $\mathbb{R}^2$.

Za pravce p_1 i p_2 u $\mathbb{R}^2$ kažemo da su *konjugirani* ako p_1 prolazi kroz pol od p_2. To vrijedi ako i samo ako p_2 prolazi kroz pol od p_1, pa je relacija konjugiranosti simetrična.

Propozicija 1.29. *Pravci u modelu H^2 su okomiti ako i samo ako odgovarajuće tetive u Beltrami-Kleinovu modelu leže na konjugiranim pravcima.*

Dokaz. Neka pravci u H^2 imaju polove $n = (n_1, n_2, n_3)$ i $m = (m_1, m_2, m_3)$. Vidjeli smo da odgovarajuće tetive u Beltrami-Kleinovu modelu leže na pravcima s jednadžbama $n_1\,x + n_2\,y = n_3$ i $m_1\,x + m_2\,y = m_3$. Polovi tih pravaca obzirom na jediničnu kružnicu su $N = (\frac{n_1}{n_3}, \frac{n_2}{n_3}) = \Pi(n)$ i $M = (\frac{m_1}{m_3}, \frac{m_2}{m_3}) = \Pi(m)$. Pravci su konjugirani ako prvi pravac sadrži točku M, odnosno drugi pravac sadrži točku N, tj. ako vrijedi $n_1\,\frac{m_1}{m_3} + n_2\,\frac{m_2}{m_3} = n_3$, odnosno $m_1\,\frac{n_1}{n_3} + m_2\,\frac{n_2}{n_3} = m_3$. Oba uvjeta ekvivalentna su sa $n_1 m_1 + n_2 m_2 - n_3 m_3 = 0 \iff b(n, m) = 0$, tj. s okomitosti odgovarajućih pravaca u H^2. □

Idući cilj je definirati metriku na skupu točkaka hiperbolične ravnine H^2. Prisjetimo se hiperbolnih funkcija

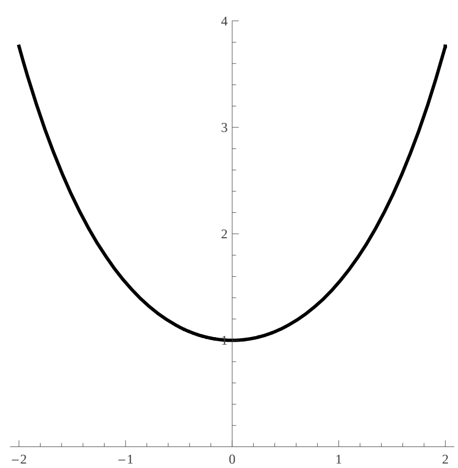
$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}, \qquad \operatorname{cth} t = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}.$$

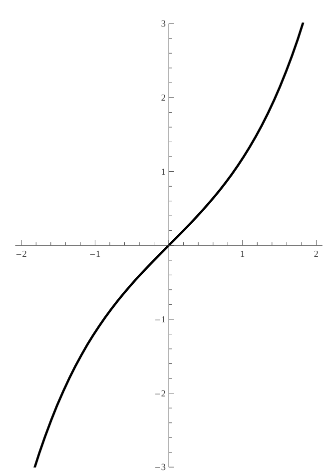
Analogija s trigonometrijskim funkcijama slijedi iz Eulerove formule $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Zbog te formule vrijedi

$$\operatorname{ch}(it) = \cos t, \qquad \operatorname{sh}(it) = i \sin t, \qquad \operatorname{th}(it) = i \operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{cth}(it) = -i \operatorname{ctg} t.$$

Osnovni identitet za trigonometrijske funkcije je $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, a za hiperbolne funkcije $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Iz toga slijedi da je $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ parametrizacija jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$, a $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ je parametrizacija desne grane istostranične hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Grafovi kosinusa hiperbolnog i sinusa hiperbolnog prikazani su na slici 1.6. Vidimo da je ch parna funkcija i poprima vrijednosti iz skupa $[1, +\infty\rangle$, a sh je neparna i poprima sve vrijednosti iz $\mathbb{R}$. Inverzne funkcije su

$$\operatorname{arch} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right), \qquad \operatorname{arsh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right).$$





Slika 1.6: Grafovi funkcija $\operatorname{ch} x$ (lijevo) i $\operatorname{sh} x$ (desno).

Pritom su domena i kodomena $\text{arch} : [1, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$, odnosno $\text{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Udaljenost točaka $P, Q \in H^2$ definiramo formulom

$$d(P, Q) = \text{arch}(-b(P, Q)). \tag{1.9}$$

Točke P i Q su jedinični vremenski vektori s pozitivnom trećom koordinatom. Po lemi 1.20 vrijedi $-b(P, Q) \geq 1$ i definicija je dobra, tj. udaljenost svake dvije točke je nenegativan realan broj.

Teorem 1.30. *Funkcija $d : H^2 \times H^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom* (1.9) *je metrika.*

Dokaz. Vrijedi $d(P, Q) \geq 0$ jer funkcija arch poprima nenegativne vrijednosti. Vrijednost 0 poprima samo za argument $1 = -b(P, Q)$, što je zbog teorema 1.18 ekvivalentno s proporcionalnosti P i Q. Zbog normiranosti i pozitivnih trećih koordinata to je ekvivalentno s $P = Q$. Simetričnost $d(P, Q) = d(Q, P)$ slijedi iz simetričnosti bilinearne forme b.

Za dokaz nejednakosti trokuta uzmimo tri točke $P, Q, T \in H^2$. Vektor Q je okomit na $T \times Q$ i $P \times Q$, pa je zbog leme 1.22 proporcionalan s njihovim vektorskim produktom. Zato je taj produkt vremenski vektor ili nulvektor, pa po teoremu 1.17 vrijedi nejednakost

$$b(T \times Q, P \times Q)^2 \leq b(T \times Q, T \times Q) \cdot b(P \times Q, P \times Q). \tag{1.10}$$

S druge strane vrijedi

$$\begin{aligned} b(T \times Q, P \times Q) &= b((T \times Q) \times P, Q) = b(-b(T, P)Q + b(Q, P)T, Q) = \\ &= -b(T, P)b(Q, Q) + b(Q, P)b(T, Q) = b(P, T) + b(P, Q)b(T, Q). \end{aligned}$$

Uz oznake $a = d(P, T)$, $b = d(T, Q)$, $c = d(P, Q)$, tj. $\text{ch}\, a = -b(P, T)$, $\text{ch}\, b = -b(T, Q)$, $\text{ch}\, c = -b(P, Q)$, prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$b(T \times Q, P \times Q) = -\text{ch}\, a + \text{ch}\, b \cdot \text{ch}\, c. \tag{1.11}$$

Iz Lagrangeova identiteta (teorema 1.11) slijedi

$$b(T \times Q, T \times Q) = b(T, Q)^2 - b(T, T)b(Q, Q) = \text{ch}^2 b - 1 = \text{sh}^2 b, \tag{1.12}$$

$$b(P \times Q, P \times Q) = b(P, Q)^2 - b(P, P)b(Q, Q) = \text{ch}^2 c - 1 = \text{sh}^2 c. \tag{1.13}$$

Uvrštavanjem (1.4), (1.12) i (1.13) u (1.10) slijedi $(\text{ch}\, b\ \text{ch}\, c - \text{ch}\, a)^2 \leq \text{sh}^2 b \cdot \text{sh}^2 c$. Zbog nengativnosti $\text{sh}\, b$, $\text{sh}\, c$ možemo izvaditi korijen, pa dobivamo

$$\text{ch}\, b\ \text{ch}\, c - \text{ch}\, a \leq \text{sh}\, b\ \text{sh}\, c \iff \text{ch}\, b\ \text{ch}\, c - \text{sh}\, b\ \text{sh}\, c \leq \text{sh}\, a.$$

Iz adicijske formule za hiperbolni kosinus (zadatak 1.24) slijedi $\text{ch}(b - c) \leq \text{ch}\, a$, tj. $c - b \leq |b - c| \leq a$. Time smo dokazali $c \leq a + b$, odnosno $d(P, Q) \leq d(P, T) + d(T, Q)$. $\square$

Objasnimo sada geometrijsku motivaciju za definiciju metrike (1.9). Rekli smo da metrika na sferi zadana analognom formulom (1.4) odgovara geodetskoj udaljenosti, tj. duljini luka velike kružnice kroz točke P i Q. Ako točke leže u x_1–x_3 ravnini, veliku kružnicu možemo parametrizirati s $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t)$. Duljinu parametrizirane krivulje za $t \in [t_1, t_2]$ računamo kao integral $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\| \mathrm{d}t$. U našem slučaju je $\dot{\alpha}(t) = (\cos t, 0, -\sin t)$ i $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Imamo parametrizaciju jedinične brzine ("duljinom luka"), pa je $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\| \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = t_2 - t_1$. To se slaže s formulom (1.4):

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = \arccos \langle \alpha(t_1), \alpha(t_2) \rangle = \arccos (\sin t_1 \sin t_2 + \cos t_1 \cos t_2) =$$
$$= \arccos (\cos(t_2 - t_1)) = t_2 - t_1.$$

Koristili smo adicijsku formulu za kosinus.

Slično, presjek gornje plohe jednopolohnog hiperboloida $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$ s x_1–x_3 ravninom ("pravac u H^2") je hiperbola koju možemo parametrizirati s $\alpha(t) = (\operatorname{sh} t, 0, \operatorname{ch} t)$. Brzina parametrizacije je $\dot{\alpha}(t) = (\operatorname{ch} t, 0, \operatorname{sh} t)$ i njezina standardna norma je $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}(2t)}$. Integral te funkcije nije elementaran, ali u modelu H^2 ambijentni prostor nije standardni unitarni $\mathbb{R}^3$, nego prostor Minkowskog. Ako uzmemo normu u prostoru Minkowskog, dobivamo jediničnu brzinu $\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t} = 1$ i integral koji predstavlja duljinu krivulje je $\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = t_2 - t_1$. To se ponovo slaže s udaljenosti po formuli (1.9):

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = \operatorname{arch} (-b(\alpha(t_1), \alpha(t_2))) = \operatorname{arch} (-(\operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 - \operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2)) =$$
$$= \operatorname{arch} (\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 - \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2) = \operatorname{arch} (\operatorname{ch}(t_2 - t_1)) = t_2 - t_1.$$

Ovdje smo koristili adicijsku formulu za kosinus hiperbolni (zadatak 1.24).

Pogledajmo sada kako bismo parametrizirali pravac kroz proizvoljne točke $P, Q \in H^2$ duljinom luka. Pol tog pravca je

$$n = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|}.$$

Skup $\{n, P\}$ je ortonormiran, pa ga po propoziciji 1.14 dopunimo do ortonormirane baze s vektorom $v = n \times P$. Budući da je $n \perp P, Q$ i $n \perp P, v$, zaključujemo da P, Q i P, v razapinju isti potprostor od $\mathbb{R}^3$: $[\{P, Q\}] = [\{P, v\}]$. Vektori u tom potprostoru su oblika $\varphi P + \psi v$ za $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Da bi to bila točka u H^2, mora vrijediti $-1 = b(\varphi P + \psi v, \varphi P + \psi v) = -\varphi^2 + \psi^2 \Longrightarrow \varphi^2 - \psi^2 = 1$. Iz $\varphi^2 = 1 + \psi^2 > \psi^2$ vidimo da je $|\varphi| > |\psi|$, a P ima pozitivnu treću koordinatu. Da bi i vektor $\varphi P + \psi v$ imao pozitivnu treću koordinatu, mora vrijediti $\varphi > 0$. Dake, (φ, ψ) je točka na desnoj grani hiperbole zadane jednadžbom $\varphi^2 - \psi^2 = 1$, pa postoji jedinstveni $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\varphi = \operatorname{ch} t$ i $\psi = \operatorname{sh} t$. Jedinična parametrizacija pravca kroz P i Q je oblika

$$\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\, P + (\operatorname{sh} t)\, v. \tag{1.14}$$

Propozicija 1.31. *Za sve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ udaljenost točaka zadanih parametrizacijom* (1.14) *je*

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_2 - t_1|.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} d(\alpha(t_1),\alpha(t_2)) &= \operatorname{arch}(-b((\operatorname{ch} t_1)P + (\operatorname{sh} t_1)v, (\operatorname{ch} t_2)P + (\operatorname{sh} t_2)v)) \\ &= \operatorname{arch}(-(-\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 + \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2)) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 - \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2) \\ &= \operatorname{arch}(\operatorname{ch}(t_1 - t_2)) = |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

□

Uvrštavanjem $t = 0$ u (1.14) dobivamo $\alpha(0) = P$. Vektor v je jedinični prostorni vektor okomit na P kojeg nazivamo *vektorom smjera* parametrizacije (1.14). U euklidskoj ravnini E^2 jedinična parametrizacija pravaca je oblika

$$\alpha(t) = P + t\,v. \tag{1.15}$$

Pritom je $P \in \mathbb{R}^2$ neka točka pravca ℓ, a $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$ je jedinični vektor smjera. Budući da v razapinje smjer pravca ℓ, jedinstveno je određen do na predznak bez obzira na izbor točke $P \in \ell$. U hiperboličnoj ravnini H^2 također možemo zamijeniti v sa $-v$, ali smjer tog vektora ovisi o izboru "početne točke" parametrizacije P (zadatak 1.25).

Pomoću jedinične parametrizacije definiramo relaciju "biti između" za točke na pravcu: za $t_1 \le t \le t_2$ kažemo da je točka $\alpha(t)$ *između* točaka $\alpha(t_1)$ i $\alpha(t_2)$. Pokazuje se da definicija ne ovisi o izboru parametrizacije. S ovim pojmom možemo karakterizirati dostizanje nejednakosti trokuta za metriku (1.9).

Propozicija 1.32. *U nejednakosti trokuta $d(P,Q) \le d(P,T) + d(T,Q)$ jednakost se dostiže ako i samo ako je točka T između točaka P i Q.*

Dokaz. Dostizanje nejednakosti trokuta ekvivalentno je s dostizanjem nejednakosti (1.10) iz dokaza teorema 1.30. U tom slučaju vektor $(T \times Q) \times (P \times Q) = -b(T, P \times Q)Q + b(Q, P \times Q)T = -b(T, P \times Q)$ nije vremenski, nego je nulvektor. Tada je T okomit na $P \times Q$, tj. leži na pravcu kroz P i Q. Ako je α parametrizacija tog pravca, postoje $p, t, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $P = \alpha(p)$, $T = \alpha(t)$, $Q = \alpha(q)$. Po propoziciji 1.31 vrijedi $d(P,Q) = |p-q|$, $d(P,T) = |p-t|$, $d(T,Q) = |t-q|$. Sada znamo da vrijedi $|p-q| = |p-t| + |t-q|$, a pokazuje se da je to ekvivalentno s $p \le t \le q$ ili $q \le t \le p$. □

Okomitost pravaca također možemo karakterizirati pomoću njihovih parametrizacija, odnosno vektora smjera.

Propozicija 1.33. *Pravci s jediničnim parametrizacijama $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\,P + (\operatorname{sh} t)\,u$ i $\beta(t) = (\operatorname{ch} t)\,P + (\operatorname{sh} t)\,v$ su okomiti ako i samo ako su im vektori smjera u i v okomiti, tj. $b(u,v) = 0$.*

Dokaz. Okomitost pravaca definirali smo preko okomitosti njihovih polova, a to su $P \times u$ i $P \times v$. Vrijedi $b(P \times u, P \times v) = b((P \times u) \times P, v) = b(-b(P,P)u + b(u,P)P, v) = b(u,v)$. □

Bitno je da su pravci parametrizirani s istom početnom točkom P, njihovim sjecištem. Kad bismo drugi pravac parametrizirali s nekom drugom početnom točkom $\beta(t) = (\operatorname{ch} t)\,Q + (\operatorname{sh} t)\,v$, za $Q \neq P$, ne bi vrijedila karakterizacija okomitosti preko vektora smjera u i v.

Skup svih točaka između $A, B \in H^2$ nazivamo *dužinom* s krajevima A, B i označavamo $\overline{AB}$. Ako je $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\, A + (\operatorname{sh} t)\, v$ jedinična parametrizacija pravca AB i $L = d(A, B)$, dužina je skup $\alpha([0, L])$. Polovište dužine je tada $P = \alpha(\frac{L}{2})$, a *simetrala* dužine pravac kroz polovište P okomit na pravac AB. Po propoziciji 1.27, dužina s krajevima $A \neq B$ ima jedinstvenu simetralu.

Propozicija 1.34. *Točka T leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako vrijedi $d(T, A) = d(T, B)$.*

Dokaz. Neka je $n = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ pol pravca AB. Po zadatku 1.26, polovište dužine $\overline{AB}$ je točka $P = \frac{A+B}{\|A+B\|}$. Vidimo da je $b(P, n) = 0$, pa simetrala ima jediničnu parametrizaciju $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\, P + (\operatorname{sh} t)\, n$. Pretpostavimo prvo da točka T leži na simetrali, tj. da za neki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $T = \alpha(t)$. Računamo:

$$
\begin{aligned}
b(T, A) &= b((\operatorname{ch} t)\, P + (\operatorname{sh} t)\, n, A) = (\operatorname{ch} t) b(P, A) + (\operatorname{sh} t) b(n, A) \\
&= \frac{\operatorname{ch} t}{\|A + B\|} b(A + B, A) = \frac{\operatorname{ch} t}{\|A + B\|} (b(A, B) - 1).
\end{aligned}
$$

Isti izraz dobijemo kad izračunamo $b(T, B)$, pa po formuli (1.9) vrijedi $d(T, A) = d(T, B)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $d(T, A) = d(T, B)$, tj. $b(T, A) = b(T, B) = \beta$. Pol simetrale je $m = n \times P$, pa računamo

$$
\begin{aligned}
b(T, m) &= b(T, n \times P) = b(T \times n, P) = b\left(T \times \frac{A \times B}{\|A \times B\|}, \frac{A + B}{\|A + B\|}\right) \\
&= \frac{1}{\|A \times B\|} \frac{1}{\|A + B\|} b(T \times (A \times B), A + b) = \alpha\, b(T \times (A \times B), A + B) \\
&= -\alpha\, b((A \times B) \times T, A + B) = -\alpha\, b(-b(A, T)B + b(B, T)A, A + B) \\
&= -\alpha\beta\, b(A + B, A - B) = -\alpha\beta\, \left(\cancel{b(A, A)} - \cancel{b(A, B)} + \cancel{b(B, A)} - \cancel{b(B, B)}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, točka T leži na simetrali dužine $\overline{AB}$. □

Neka je $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\, P + (\operatorname{sh} t)\, v$ jedinična parametrizacija nekog pravca u H^2. Skup $\alpha([0, +\infty\rangle)$ zovemo *polupravcem* s vrhom P i vektorom smjera v. Za razliku od pravca ℓ, kojeg možemo parametrizirati s bilo kojom početnom točkom $P \in \ell$ i vektor smjera v mu možemo zamijeniti s $-v$, polupravac ima jednoznačno određen vrh i vektor smjera. Ako polupravcu zamijenimo vektor smjera v s $-v$, dobivamo *suprotni polupravac* koji leži na istom pravcu, a presjek im je samo vrh.

Propozicija 1.35. *Za svake dvije točke $A, B \in H^2$ postoji jedinstveni polupravac s vrhom A koji sadrži B.*

Dokaz. Neka je $n = \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$ pol pravca AB. Riječ je o polupravcu s vrhom A i vektorom smjera $v = n \times A$. □

Popupravac iz prethodne propozicije označavamo $\overrightarrow{AB}$. *Kut* je neuređen par polupravaca s istim vrhom. Te polupravce $\vec{h}$ i $\vec{k}$ nazivamo *krakovima kuta*, a kut označavamo $\angle(\vec{h},\vec{k})$. Za tri točke $A,B,C \in H^2$ oznake $\angle ABC$ i $\angle CBA$ znače kut s krakovima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$. Definicije kuta, polupravca i dužine u modelu euklidske ravnine E^2 su iste, samo se koristimo euklidskom jediničnom parametrizacijom (1.15). Ako krakovi $\vec{h}$ i $\vec{k}$ imaju jedinične parametrizacije $\alpha(t) = P + t\,u$ i $\beta(t) = P + t\,v$, euklidsku mjeru kuta $\angle(\vec{h},\vec{k})$ označavamo $\measuredangle(\vec{h},\vec{k})$ i definiramo kao kut između vektora smjera u i v:

$$\measuredangle(\vec{h},\vec{k}) = \arccos\langle u, v\rangle. \tag{1.16}$$

Mjeru kuta u modelu hiperbolične ravnine H^2 definiramo analogno. Ako krakovi $\vec{h}$ i $\vec{k}$ imaju jedinične parametrizacije $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)\,P + (\operatorname{sh} t)\,u$ i $\beta(t) = (\operatorname{ch} t)\,P + (\operatorname{sh} t)\,v$, tj. vektore smjera u i v, mjera kuta je

$$\measuredangle(\vec{h},\vec{k}) = \arccos b(u, v). \tag{1.17}$$

Budući da su u i v oba okomiti na P, vektorski produkt $u \times v$ je vremenski vektor ili nulvektor. Po teoremu 1.17 vrijedi $b(u,v)^2 \le b(u,u)\cdot b(v,v) = 1$, tj. $|b(u,v)| \le 1$. Zato možemo izračunati arkus kosinus i definicija je dobra. Za $u = v$ je $b(u,v) = 1 \Rightarrow \measuredangle(\vec{h},\vec{k}) = \measuredangle(\vec{h},\vec{h}) = \arccos 1 = 0$. To je mjera *nulkuta*, kojem se krakovi podudaraju. Za $u = -v$ krakovi su suprotni polupravci, a kut zovemo *ispruženim kutom*. Njegova mjera je $\measuredangle(\vec{h},\vec{k}) = \measuredangle(\vec{h},-\vec{h}) = \arccos(-1) = \pi$. Nadalje, krakovi su okomiti ako je $b(u,v) = 0$ (propozicija 1.33). Takav kut nazivamo *pravim kutom* i mjera mu je $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Propozicija 1.36. *Za tri točke $A,B,C \in H^2$ mjera odgovarajućeg kuta je*

$$\measuredangle ABC = \arccos\left(b\left(\frac{B\times A}{\|B\times A\|}, \frac{B\times C}{\|B\times C\|}\right)\right).$$

Dokaz. Vektori $m = \frac{B\times A}{\|B\times A\|}$ i $n = \frac{B\times C}{\|B\times C\|}$ su polovi pravaca BA i BC. Vektori smjera polupravaca $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BA}$ su $u = m\times B$ i $v = n \times B$. Po definiciji je mjera $\measuredangle ABC = \arccos(b(u,v))$, a propozicija tvrdi da je jednaka $\arccos(b(m,n))$. Dovoljno je pokazati $b(u,v) = b(m,n)$:

$$\begin{aligned} b(u,v) &= b(m\times B, n\times B) = b((m\times B)\times n, B) = b(-b(m,n)B + b(B,n)m, B) = \\ &= -b(m,n)b(B,B) = b(m,n). \end{aligned}$$

Koristili smo propoziciju 1.9, teorem 1.10 te $b(B,n) = 0$ i $b(B,B) = -1$. □

Mjeru kuta definirali smo kao kut između vektora smjera krakova, a po prethodnoj propoziciji mogli smo je definirati kao kut između polova pravaca na kojima leže krakovi. Neka je ℓ pravac s polom n. *Poluravnine* određene tim pravcem su $\ell^+ = \{x \in H^2 \mid b(n,x) > 0\}$ i $\ell^- = \{x \in H^2 \mid b(n,x) < 0\}$. Definicije su analogne kao u modelu euklidske ravnine E^2, gdje su pravci zadani jednadžbama oblika $\langle n, x\rangle = \beta$, a odgovarajuće poluravnine nejednadžbama $\langle n,x\rangle > \beta$ i $\langle n,x\rangle < \beta$. Očito vrijedi $\ell^+ \cup \ell^- = H^2 \setminus \ell$. Idući teorem omogućuje nam da s pomoću dužina, tj. relacije “biti između” za točke na pravcu, odredimo pripadaju li točke $A,B \in H^2 \setminus \ell$ istoj ili suprotnim poluravninama.

Teorem 1.37. *Točke $A, B \in H^2 \setminus \ell$ pripadaju istoj poluravnini određenoj pravcem ℓ ako i samo ako dužina $\overline{AB}$ ne siječe ℓ.*

Dokaz. Neka pravac ℓ ima pol n. Pretpostavimo da A i B pripadaju istoj poluravnini, recimo $A, B \in \ell^+$. Tada vrijedi $b(n, A) > 0$ i $b(n, B) > 0$. Neka je $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)A + (\operatorname{sh} t)v$ jedinična parametrizacija polupravca $\overrightarrow{AB}$. Tada je $B = (\operatorname{ch} L)A + (\operatorname{sh} L)v$ za $L = d(A, B)$, a točke na dužini $\overline{AB}$ su oblika $T = \alpha(t) = (\operatorname{ch} t)A + (\operatorname{sh} t)v$ za $t \in [0, L]$. Pokazat ćemo da dužina ne siječe pravac ℓ tako da pokažemo $b(n, T) > 0$. Iz $b(n, B) > 0$ slijedi $b(n, v) > -\frac{\operatorname{ch} L}{\operatorname{sh} L}\, b(n, A)$, pa zaključujemo

$$
\begin{aligned}
b(n, T) &= b(n, (\operatorname{ch} t)A + (\operatorname{sh} t)v) = (\operatorname{ch} t)b(n, A) + (\operatorname{sh} t)b(n, v) > \\
&> (\operatorname{ch} t)b(n, A) + (\operatorname{sh} t)\left(-\frac{\operatorname{ch} L}{\operatorname{sh} L}\, b(n, A)\right) = \frac{b(n, A)}{\operatorname{sh} L}\,\big(\operatorname{sh} L \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} L \operatorname{sh} t\big) = \\
&= \frac{b(n, A)}{\operatorname{sh} L}\, \operatorname{sh}(L - t) > 0.
\end{aligned}
$$

Koristili smo adicijsku formulu za hiperbolni sinus (zadatak 1.24).

Obrnuto, pretpostavimo da dužina $\overline{AB}$ ne siječe ℓ. Kad bi točke A i B pripadale različitim poluravninama, recimo $A \in \ell^-$, $B \in \ell^+$, vrijedilo bi $b(n, A) < 0$, $b(n, B) > 0$. Tada bi funkcija $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, $f(t) = b(n, \alpha(t))$ u rubovima poprimala vrijednosti suprotnog predznaka. Zbog neprekidnosti postojao bi $t_0 \in \langle 0, L\rangle$ takav da je $f(t_0) = 0$, pa bi odgovarajuća točka $T_0 = \alpha(t_0)$ bila iz presjeka $\overline{AB} \cap \ell$. Zato A i B pripadaju istoj poluravnini određenoj s ℓ. $\square$

Unutrašnjost kuta $\angle ABC$ je presjek poluravnine određene pravcem AB koja sadrži točku C i poluravnine određene pravcem BC koja sadrži točku A. Definicija nema smisla za nulkutove i ispružene kutove, jer su tada točke A, B, C kolinearne. Unutrašnjost tih kutova nije definirana.

Teorem 1.38. *Neka je $\angle ABC$ kut čija je unutrašnjost definirana i neka njegovi krakovi imaju vektore smjera u i v. Unutrašnjost tog kuta sastoji se od svih točaka $X \in H^2$ takvih da je vektor smjera polupravca $\overrightarrow{BX}$ linearna kombinacija od u i v s pozitivnim koeficijentima.*

Dokaz. Neka je $X \in H^2 \setminus \{B\}$ bilo koja točka i neka je w vektor smjera polupravca $\overrightarrow{BX}$. Vektori u, v i w zadovoljavaju jednadžbu $b(x, B) = 0$, a to je jednadžba dvodimenzionalnog potprostora od $\mathbb{R}^3$. Skup $\{u, v\}$ je baza tog potprostora (linearno je nezavisan jer $\angle ABC$ nije nulkut niti ispruženi kut, pa u i v nisu proporcionalni). Zato postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $w = \alpha u + \beta v$. Dokazat ćemo da je X u unutrašnjosti kuta $\angle ABC$ ako i samo ako su $\alpha > 0$ i $\beta > 0$. Postoji $t > 0$ takav da je $X = (\operatorname{ch} t)B + (\operatorname{sh} t)w$. Pol pravca na kojem leži krak $\overrightarrow{BA}$ je $u \times B$. Računamo:

$$
\begin{aligned}
b(X, u \times B) &= b((\operatorname{ch} t)B + (\operatorname{sh} t)(\alpha u + \beta v), u \times B) = \\
&= (\operatorname{ch} t)\, b(B, u \times B) + (\operatorname{sh} t)\, \alpha\, b(u, u \times B) + (\operatorname{sh} t)\, \beta\, b(v, u \times B) = \\
&= (\operatorname{sh} t)\, \beta\, b(v, u \times B).
\end{aligned}
$$

Postoji $s > 0$ takav da je $C = (\operatorname{ch} s)B + (\operatorname{sh} s)v$. Iz toga možemo izraziti $v = \frac{1}{\operatorname{sh} s}C - \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{sh} s}B$ i uvrstiti u gornju jednadžbu:

$$\begin{aligned} b(X, u \times B) &= (\operatorname{sh} t)\, \beta\, b\left(\tfrac{1}{\operatorname{sh} s}C - \tfrac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{sh} s}B, u \times B\right) = \tfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} s}\, \beta\, b(C, u \times B) - \tfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} s}{\operatorname{sh} s}\, \beta\, b(B, u \times B) \\ &= \beta\, \tfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} s}\, b(C, u \times B). \end{aligned}$$

Budući da je $\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} s} > 0$, vidimo da su $b(X, u \times B)$ i $b(C, u \times B)$ istog predznaka ako i samo ako je $\beta > 0$. Dakle, X i C su s iste strane pravca AB ako i samo ako je $\beta > 0$. Na isti način vidimo da su X i A s iste strane pravca BC ako i samo ako je $\alpha > 0$. □

Sljedeća dva teorema pokazuju da je kutna mjera u H^2 aditivna.

Teorem 1.39. *Neka je $\angle ABC$ kut čija je unutrašnjost definirana i X točka u njegovoj unutrašnjosti. Tada je $\measuredangle ABX + \measuredangle XBC = \measuredangle ABC$.*

Dokaz. Neka su u, v i w redom vektori smjera polupravaca $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BX}$. Iz prethodnog teorema slijedi da je $w = \alpha u + \beta v$ za neke $\alpha, \beta > 0$. Trebamo dokazati

$$\arccos b(u, v) = \arccos b(u, w) + \arccos b(w, v).$$

Označimo $t = b(u, v)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} b(u, w) &= b(u, \alpha u + \beta v) = \alpha b(u, u) + \beta b(u, v) = \alpha + \beta t, \\ b(w, v) &= b(\alpha u + \beta v, v) = \alpha b(u, v) + \beta b(v, v) = \alpha t + \beta. \end{aligned}$$

Dakle, trebamo dokazati

$$\arccos t = \arccos(\alpha + \beta t) + \arccos(\alpha t + \beta). \tag{1.18}$$

Na desnu stranu primijenit ćemo adicijsku formulu za arkus kosinus

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2})$$

za $x = \alpha + \beta t$ i $y = \alpha t + \beta$ (zadatak 1.33). Vrijedi

$$1 = b(w, w) = b(\alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta t$$

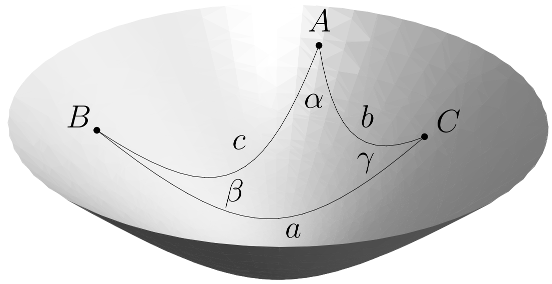
iz čega dobivamo

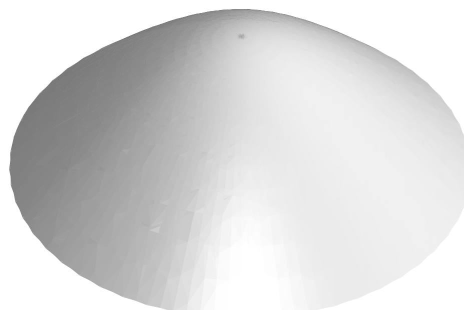
$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 1 - \alpha^2 - 2\alpha\beta t - \beta^2 t^2 = \cancel{\alpha^2} + \beta^2 + \cancel{2\alpha\beta t} - \cancel{\alpha^2} - \cancel{2\alpha\beta t} - \beta^2 t^2 = \beta^2(1 - t^2), \\ 1 - y^2 &= 1 - \alpha^2 t^2 - 2\alpha\beta t - \beta^2 = \alpha^2 + \cancel{\beta^2} + \cancel{2\alpha\beta t} - \alpha^2 t^2 - \cancel{2\alpha\beta t} - \cancel{\beta^2} = \alpha^2(1 - t^2). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} xy - \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} &= (\alpha + \beta t)(\alpha t + \beta) - \alpha\beta(1 - t^2) = \\ &= \alpha^2 t + \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t - \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta t^2 = \\ &= t(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta t) = t \end{aligned}$$

i dobili smo upravo formulu (1.18). □





Slika 1.7: Hiperbolični trokut.

Teorem 1.40. *Neka je $\angle ABC$ ispruženi kut i X točka koja ne leži na pravcu $AB = BC$. Tada je $\measuredangle ABX + \measuredangle XBC = \pi$.*

Dokaz. Uz iste oznake kao u prethodnom teoremu, vektori smjera u i v su sada suprotni ($v = -u$) i ne možemo izraziti w kao njihovu linearnu kombinaciju. Tvrdnja teorema

$$\arccos b(u, w) + \arccos b(w, v) = \arccos b(u, w) + \arccos(-b(u, w)) = \pi$$

slijedi direktno iz adicijske formule $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$ (zadatak 1.33). $\square$

Trokut u H^2 definiramo kao skup od tri nekolinearne točke $\{A, B, C\}$. Te točke zovemo *vrhovima* trokuta i trokut označavamo ΔABC. *Stranice* trokuta su dužine $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, a *kutovi* trokuta $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$. Duljine stranica označavamo redom a, b, c, a mjere kutova α, β, γ. *Unutrašnjost* trokuta je presjek unutrašnjosti njegovih kutova.

Primjer 1.41. *Promotrimo trokut u H^2 s vrhovima $A = (0, 0, 1)$, $B = (4, 8, 9)$ i $C = (2, 2, 3)$. Duljine njegovih stranica su*

$$a = d(B, C) = \operatorname{arch}(-b(B, C)) = \operatorname{arch}(-8 - 16 + 27) = \operatorname{arch} 3,$$
$$b = d(A, C) = \operatorname{arch}(-b(A, C)) = \operatorname{arch}(0 + 0 + 3) = \operatorname{arch} 3,$$
$$c = d(A, B) = \operatorname{arch}(-b(A, B)) = \operatorname{arch}(0 + 0 + 9) = \operatorname{arch} 9.$$

Vidimo da vrijedi $a = b$, tj. trokut je jednakokračan. U euklidskoj ravnini mjere kutova nasuprot krakovima bile bi jednake. Za mjere kutova u hiperboličnoj ravnini trebaju nam *vektorski produkti, koje računamo po formuli* (1.6)*:* $A\times B = (-8,4,0)$*,* $A\times C = (-2,2,0)$ *i* $B\times C = (6,6,8)$*. Po propoziciji 1.36, mjere kutova nasuprot krakovima su*

$$\alpha = \measuredangle BAC = \arccos\left(b\left(\frac{A\times B}{\|A\times B\|}, \frac{A\times C}{\|A\times C\|}\right)\right) = \arccos\left(b\left(\frac{(-8,4,0)}{\sqrt{64+16}}, \frac{(-2,2,0)}{\sqrt{4+4}}\right)\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{16+8-0}{\sqrt{640}}\right) = \arccos\left(\frac{24}{8\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right),$$

$$\beta = \measuredangle ABC = \arccos\left(b\left(\frac{B\times A}{\|B\times A\|}, \frac{B\times C}{\|B\times C\|}\right)\right) = \arccos\left(b\left(\frac{(8,-4,0)}{\sqrt{64+16}}, \frac{(6,6,8)}{\sqrt{36+36-64}}\right)\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{48-24-0}{\sqrt{640}}\right) = \arccos\left(\frac{24}{8\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

Zaista vrijedi $\alpha = \beta$*, a mjera trećeg kuta je*

$$\gamma = \measuredangle ACB = \arccos\left(b\left(\frac{C\times A}{\|C\times A\|}, \frac{C\times B}{\|C\times B\|}\right)\right) = \arccos\left(b\left(\frac{(2,-2,0)}{\sqrt{4+4}}, \frac{(-6,-6,-8)}{\sqrt{36+36-64}}\right)\right)$$

$$= \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, ΔABC *je pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu* C*. U euklidskoj ravnini u jednakokračnom pravokutnom trokutu mjere kutova nasuprot katetama su* $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$*. U našem trokutu je* $\alpha = \beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.321751 \approx 18^\circ 26' 6''$*. Vidimo da je u ovom trokutu* $\alpha + \beta + \gamma < \pi = 180^\circ$*.*

1.5 Hiperbolična trigonometrija

Osnovna zadaća trigonometrije je određivanje nepoznatih veličina trokuta iz zadanih veličina. U euklidskom pravokutnom trokutu s katetama duljina a i b, hipotenuzom duljine c i kutovima mjera α i β vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}. \tag{1.19}$$

S pomoću tih relacija možemo izračunati duljinu katete iz duljine hipotenuze i mjere priležećeg kuta, a s pomoću relacija

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c} \tag{1.20}$$

iz mjere nasuprotnog kuta. Relacije koje povezuju duljine dviju kateta s mjerama kutova su

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{1.21}$$

Euklidski pravokutni trokut određen je jednim svojim oštrim kutom do na sličnost, a omjeri njegovih stranica jednoznačno su određeni. Zato ove relacije možemo shvatiti kao definicije trigonometrijskih funkcija za kutove iz intervala $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Poznatom konstrukcijom namatanja brojevnog pravca na kružnicu proširujemo ih do funkcija definiranih na $\mathbb{R}$.

Cilj nam je doći do hiperboličnih analogona relacija (1.19), (1.20), (1.21) i drugih trigonometrijskih identiteta u modelu H^2. U članku [15] uz to su dani i odgovarajući rezultati sferne trigonometrije. Prvo ćemo izvesti hiperbolični teorem o kosinusu, koji u euklidskoj ravnini glasi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{1.22}$$

Ova relacija vrijedi u svakom trokutu (ne samo pravokutnom) i omogućuje nam izračunavanje kuta γ iz duljina stranica a, b, c. Možemo je shvatiti kao generalizaciju Pitagorina teorema $c^2 = a^2 + b^2$ na opće trokute.

Teorem 1.42 (Hiperbolični teorem o kosinusu)**.** *U svakom hiperboličnom trokutu vrijedi*

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \, \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \, \operatorname{sh} b \, \cos\gamma. \tag{1.23}$$

Dokaz. Iz formule za udaljenost (1.9) slijedi $\operatorname{ch} a = -b(B,C)$, $\operatorname{ch} b = -b(A,C)$ i $\operatorname{ch} c = -b(A,B)$. S druge strane, po propoziciji 1.36 je

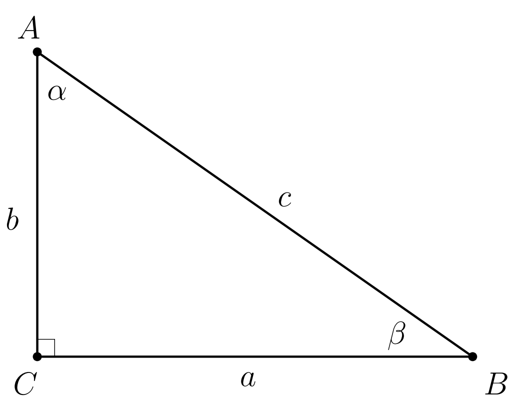
$$\cos\gamma = b\left(\frac{C\times A}{\|C\times A\|}, \frac{C\times B}{\|C\times B\|}\right) = \frac{b(C\times A, C\times B)}{\|C\times A\|\cdot\|C\times B\|}.$$

Iz propozicije 1.9 i teorema 1.10 dobivamo

$$\begin{aligned} b(C\times A, C\times B) &= b((C\times A)\times C, B) = b(-b(C,C)A + b(A,C)C, B) = \\ &= b(A + b(A,C)C, B) = b(A,B) + b(A,C)b(B,C) = \operatorname{ch} a \, \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \|C\times A\|^2 &= b(C\times A, C\times A) = b((C\times A)\times C, A) = b(-b(C,C)A + b(A,C)C, A) = \\ &= b(A + b(A,C)C, A) = b(A,A) + b(A,C)^2 = \operatorname{ch}^2 b - 1 = \operatorname{sh}^2 b, \end{aligned}$$



Slika 1.8: Pravokutni trokut.

a sličnim računom slijedi $\|C \times B\|^2 = \operatorname{sh}^2 a$. Dakle,

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} b}$$

što je ekvivalentno formuli (1.23). □

Iz prethodnog teorema slijedi Pitagorin teorem u modelu H^2.

Korolar 1.43 (Hiperbolični Pitagorin teorem)**.** *U hiperboličnom trokutu vrijedi $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ako i samo ako je*

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b.$$

Dokaz. Uočimo da je $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ekvivalentno s $\cos\gamma = 0$. □

Sada možemo izvesti hiperboličnu verziju relacije (1.19). Za pravokutni trokut kosinus kuta je omjer priležeće katete i hipotenuze, ali na brojnik i nazivnik treba primijeniti tangens hiperbolni.

Korolar 1.44. *U hiperboličnom trokutu s pravim kutom pri vrhu C vrijedi*

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}, \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}.$$

Dokaz. Iz hiperboličnog teorema o kosinusu 1.42 i Pitagorina teorema 1.43 slijedi

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{ch} b \ \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \ \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a \ \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} b \ \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a\,(\operatorname{ch}^2 b - 1)}{\operatorname{sh} b \ \operatorname{sh} c} =$$
$$= \frac{\operatorname{ch} a \ \operatorname{sh}^2 b}{\operatorname{sh} b \ \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} a \ \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \frac{\frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} b} \ \operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \frac{\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}{\frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} c}} = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}.$$

Na isti način dobivamo formulu za $\cos\beta$. □

Drugi poznati identitet koji vrijedi u svakom trokutu je teorem o sinusima, koji u euklidskoj ravnini glasi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{1.24}$$

Geometrijska interpretacija ovog omjera je promjer trokutu opisane kružnice ili $\frac{abc}{2P}$, gdje je P površina trokuta. Hiperboličnu verziju identiteta možemo izvesti iz teorema o kosinusu 1.42.

Teorem 1.45 (Hiperbolični teorem o sinusima)**.** *U svakom hiperboličnom trokutu vrijedi*

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}. \tag{1.25}$$

Dokaz. Iz teorema 1.42 i identiteta $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ te $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = 1 - \left(\frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}\right)^2 = \\
= \frac{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b - \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b} = \\
= \frac{(\operatorname{ch}^2 a - 1)(\operatorname{ch}^2 b - 1) - \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b} = \\
= \frac{1 - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b}.
\end{aligned}$$

Omjer $\frac{\operatorname{sh}^2 c}{\sin^2\gamma}$ možemo zapisati kao izraz simetričan u a, b i c:

$$\frac{\operatorname{sh}^2 c}{\sin^2\gamma} = \frac{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh}^2 b \operatorname{sh}^2 c}{1 - \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b - \operatorname{ch}^2 c + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c}.$$

Isti izraz dobili bismo računanjem $\frac{\operatorname{sh}^2 a}{\sin^2\alpha}$ i $\frac{\operatorname{sh}^2 b}{\sin^2\beta}$, pa se ta tri omjera podudaraju. □

Iz teorema o sinusima dobivamo hiperboličnu varijantu relacije (1.20).

Korolar 1.46. *U hiperboličnom trokutu s pravim kutom pri vrhu C vrijedi*

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}, \qquad \sin\beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c}.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz teorema 1.45 zato što je $\sin\gamma = 1$. □

Konačno, iz $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t} = \frac{\sin t}{\cos t}$ i korolara 1.43, 1.44 i 1.46 vidimo kako glasi hiperbolična varijanta relacije (1.21).

Korolar 1.47. *U hiperboličnom trokutu s pravim kutom pri vrhu C vrijedi*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{sh} a}.$$

Mađarski matematičar János Bolyai (1802.–1860.), jedan od otkrivača hiperbolične geometrije, uočio je da množenjem relacija (1.24) i (1.25) s 2π u brojniku dobivamo izraze za duljinu kružnice. To vrijedi i u sfernoj geometriji, u kojoj teorem o sinusima glasi

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

U euklidskoj ravnini duljinu kružnice polumjera r računamo po poznatoj formuli $O(r) = 2\pi r$. U hiperboličnoj ravnini vrijedi formula $O(r) = 2\pi \operatorname{sh} r$, a u sfernoj geometriji $O(r) = 2\pi \sin r$. Tako je J. Bolyai dobio univerzalni iskaz teorema o sinusima: u svakom euklidskom, hiperboličnom i sfernom trokutu vrijedi

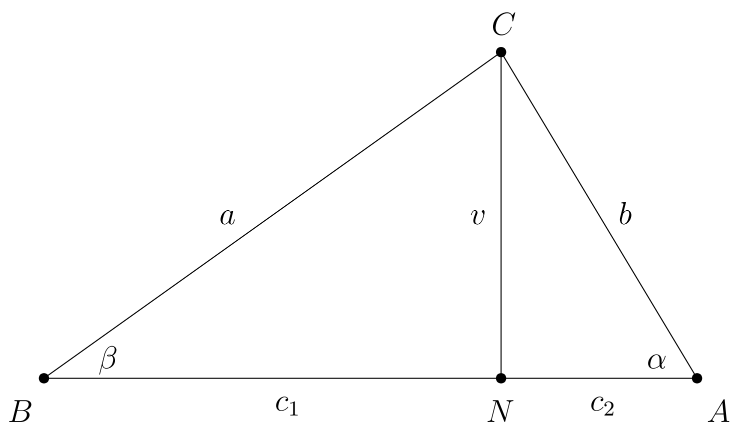
$$\frac{O(a)}{\sin\alpha} = \frac{O(b)}{\sin\beta} = \frac{O(c)}{\sin\gamma}.$$

Riječima, omjer sinusa kuta i duljine kružnice kojoj je polumjer nasuprotna stranica trokuta je konstantan. Dokazi formula za duljinu euklidske i hiperbolične kružnice nalaze se u knjizi [9] na str. 407–408.

Na kraju ćemo upoznati trigonometrijski identitet u hiperboličnoj ravnini koji nema ekvivalenta u euklidskoj ravnini. S pomoću teorema o kosinusu (1.22) i (1.23), iz duljina stranica trokuta a, b, c možemo izračunati mjere njegovih kutova α, β, γ. Obrnuto, ako su zadane mjere kutova α, β, γ euklidskog trokuta, ne možemo izračunati duljine njegovih stranica jer je trokut određen samo do na sličnost. U hiperboličnoj trigonometriji ipak imamo formulu koja nam to omogućuje.

Teorem 1.48 (Dualni teorem o kosinusu)**.** *U svakom hiperboličnom trokutu vrijedi*

$$\cos\gamma = \sin\alpha \sin\beta \operatorname{ch} c - \cos\alpha \cos\beta.$$



Slika 1.9: Dokaz dualnog teorema o kosinusu.

Dokaz. Po propoziciji 1.27 možemo spustiti visinu iz vrha C na pravac AB (slika 1.9). Dokazujemo u slučaju da nožište N leži između vrhova A i B; u ostalim slučajevima dokaz je sličan. Neka je duljina visine $v = d(C, N)$ i neka nožište dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljine $c_1 = d(B, N)$ i $c_2 = d(N, A)$. Iz Pitagorina teorema (korolar 1.43) primijenjenog na pravokutne trokute ΔBNC i ΔANC slijedi $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} v$ i $\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c_2 \operatorname{ch} v$. Pomnožimo te dvije jednakosti međusobno i sa $\operatorname{ch} c$, koji s lijeve strane raspišemo po adicijskoj formuli $\operatorname{ch}(c_1 + c_2) = \operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} c_2 + \operatorname{sh} c_1 \operatorname{sh} c_2$:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \,(\operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} c_2 + \operatorname{sh} c_1 \operatorname{sh} c_2) = \operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} c_2 \operatorname{ch}^2 v \operatorname{ch} c.$$

Podijelimo sa $\operatorname{ch} c_1 \operatorname{ch} c_2$ i zamijenimo $\operatorname{ch}^2 v$ sa $1 + \operatorname{sh}^2 v$:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \,(1 + \operatorname{th} c_1 \operatorname{th} c_2) = (1 + \operatorname{sh}^2 v) \operatorname{ch} c.$$

Izmnožimo zagrade i presložimo jednadžbu:

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} c = \operatorname{sh}^2 v \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{th} c_1 \operatorname{th} c_2.$$

Izraz na lijevoj strani raspišemo po teoremu o kosinusu 1.42:

$$\operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} b \ \cos\gamma = \operatorname{sh}^2 v \ \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b \ \operatorname{th} c_1 \ \operatorname{th} c_2.$$

Podijelimo sa $\operatorname{sh} a \ \operatorname{sh} b$, pa dobijemo

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{sh} a} \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{sh} b} \operatorname{ch} c - \frac{\operatorname{th} c_1}{\operatorname{th} a} \frac{\operatorname{th} c_2}{\operatorname{th} b}.$$

Na kraju primijenimo korolare 1.44 i 1.46 na pravokutne trokute ΔBNC i ΔANC:

$$\cos\gamma = \sin\beta \ \sin\alpha \ \operatorname{ch} c - \cos\beta \ \cos\alpha.$$

□

Osim klasičnih teorema o sukladnosti SKS, KSK, SKK i SSK$^>$, u hiperboličnoj ravnini vrijedi i teorem o sukladnosti KKK. Dva hiperbolična trokuta koji se podudaraju u sva tri kuta su sukladni, a slični trokuti ne postoje.

Zadaci

Zadatak 1.1. *Dokažite propozicije 1.5 i 1.6.*

Zadatak 1.2. *Definirajte pojam kuta i kutne mjere u E^2.*

Zadatak 1.3. *Dokažite da je suma mjera kutova trokuta u E^2 jednaka π.*

Zadatak 1.4. *Dokažite da se težišnice trokuta u E^2 sijeku u jednoj točki.*

Zadatak 1.5. *Dokažite da se visine trokuta u E^2 sijeku u jednoj točki.*

Zadatak 1.6. *Primjerom pokažite da je suma mjera kuteva sfernog trokuta veća od π, tj. izaberite vrhove $A, B, C \in S^2$ i izračunajte $\alpha + \beta + \gamma$.*

Zadatak 1.7. *Dokažite sferni teorem o kosinusu: za sferni trokut sa stranicama duljine a, b, c i kutovima mjere α, β, γ vrijedi $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$. Iz toga izvedite sferni Pitagorin teorem.*

Zadatak 1.8. *Kako računamo površinu sfernog trokuta? Koliko najviše može biti?*

Zadatak 1.9. *Dokažite Lagrangeov identitet za vektore $u, v \in \mathbb{R}^n$:*

$$\|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} (u_i v_j - u_j v_i)^2.$$

Zadatak 1.10. *Dokažite da za standardni vektorski produkt vrijedi: ako je $u \times v \neq 0$, onda je $\{u, v, u \times v\}$ baza od $\mathbb{R}^3$.*

Zadatak 1.11. *Dokažite da za vektorski produkt u prostoru Minkowskog vrijedi: ako $u \times v$ nije nulvektor niti svjetlosni vektor, onda je $\{u, v, u \times v\}$ baza od $\mathbb{R}^3$.*

Zadatak 1.12. *Pokažite primjerom da "norma" u prostoru Minkowskog definirana formulom* $\|x\| = \sqrt{|b(x,x)|}$ *ne zadovoljava nejednakost trokuta.*

Zadatak 1.13. *Ako je vremenski vektor* v *okomit na vektor* $u \neq 0$*, dokažite da je tada* u *prostorni vektor.*

Zadatak 1.14. *Neka su* u *i* v *vremenski vektori. Dokažite da je* $u \times v$ *nulvektor ili prostorni vektor.*

Zadatak 1.15. *Neka su* u *i* v *prostorni vektori. Pokažite primjerom da* $u \times v$ *može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni vektor.*

Zadatak 1.16. *Neka su* u *i* v *prostorni vektori takvi da postoji vremenski vektor* w *okomit na* u *i na* v*. Dokažite da je tada* $u \times v$ *nulvektor ili vremenski vektor.*

Zadatak 1.17. *Neka su* u *i* v *svjetlosni vektori. Dokažite da su* u *i* v *ortogonalni ako i samo ako su proporcionalni. Dokažite da je* $u \times v$ *nulvektor ili prostorni vektor.*

Zadatak 1.18. *Koje su od sljedećih tvrdnji istinite? Dokažite ih ili opovrgnite protuprimjerom.*

(a) Linearna kombinacija prostornih vektora je prostorni vektor ili nulvektor.

(b) Linearna kombinacija s nenegativnim koeficijentima prostornih vektora je prostorni vektor ili nulvektor.

(c) Linearna kombinacija međusobno okomitih prostornih vektora je prostorni vektor ili nulvektor.

(d) Linearna kombinacija vremenskih vektora je vremenski vektor ili nulvektor.

(e) Linearna kombinacija s nenegativnim koeficijentima vektora koji su točke u modelu H^2 *je vremenski vektor ili nulvektor.*

Zadatak 1.19. *Neka su* $A = (-2,-2,3)$ *i* $B = (4,-8,9)$ *točke hiperbolične ravnine* H^2*. Odredite pol (jediničnu normalu) pravca* AB*.*

Zadatak 1.20. *Neka su* ℓ_1 *i* ℓ_2 *pravci hiperbolične ravnine* H^2 *s polovima* $n_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6}, 0, \sqrt{2})$ *i* $n_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$*. Odredite sjecište ta dva pravca.*

Zadatak 1.21. *Neka je* ℓ *pravac s polom* $n = (3,1,3)$ *i* $T = (2,2,3)$ *točka u* H^2*. Odredite polove paralela s* ℓ *kroz* T*, bar tri ultraparalele s* ℓ *kroz* T *i okomice na* ℓ *kroz* T*.*

Zadatak 1.22. *Neka je* $T = (1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ *točka i* p *pravac s polom* $n = (1,2,2)$ *u modelu* H^2*. Odredite ortogonalnu projekciju točke* T *na pravac* p*.*

Zadatak 1.23. *Neka su* ℓ_1 *i* ℓ_2 *pravci s polovima* $n_1 = (1,2,2)$ *i* $n_2 = (2,-1,2)$*. Dokažite da su* ℓ_1 *i* ℓ_2 *ultraparalelni i odredite pol njihove zajedničke normale.*

Zadatak 1.24. *Dokažite adicijske formule za hiperbolni kosinus i sinus:*

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

Zadatak 1.25. *Za točke A i B iz zadatka 1.19 odredite jedinične parametrizacije pravca AB s početkom u točki A i u točki B. Točnije, odredite jedinične prostorne vektore u i v takve da $\alpha(t) = (\operatorname{ch} t)A + (\operatorname{sh} t)u$ i $\beta(t) = (\operatorname{ch} B) + (\operatorname{sh} t)v$ budu parametrizacije duljinom luka pravca AB. Jesu li vektori u i v proporcionalni?*

Zadatak 1.26. *Ako su A i B točke iz H^2, dokažite da je $P = \frac{1}{\|A+B\|}(A+B)$ polovište dužine $\overline{AB}$, tj. da je P točka iz H^2 koja leži na pravcu AB i jednako je udaljena od A i od B.*

Zadatak 1.27. *Neka su $A = (0, 0, 1)$, $B = (-2, -2, 3) \in H^2$. Odredite pol i parametrizaciju simetrale dužine $\overline{AB}$.*

Zadatak 1.28. *Dokažite u modelu H^2 da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki.*

Zadatak 1.29. *Vrijedi li u modelu H^2 da se visine trokuta sijeku u jednoj točki?*

Zadatak 1.30. *Neka su ℓ_1 i ℓ_2 različiti pravci u H^2 s polovima n_1 i n_2. Dokažite: ℓ_1 i ℓ_2 se sijeku ako i samo ako je $|b(n_1, n_2)| < 1$.*

Zadatak 1.31. *Neka je P točka i ℓ pravac s polom n. Izvedite formule za nožište okomice iz P na ℓ i udaljenost točke P od pravca ℓ u modelu H^2.*

Zadatak 1.32. *Neka su $A = (0, 0, 1)$, $B = (2, 2, 3)$ i $C = (4, 8, 9) \in H^2$. Pripada li točka $X = (\frac{7}{4}, 1, \frac{9}{4})$ unutrašnjosti kuta $\angle ABC$?*

Zadatak 1.33. *Dokažite adicijske formule za arkus kosinus*

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),$$

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi$$

za sve $x, y \in [-1, 1]$, $x + y \geq 0$.

Zadatak 1.34. *Neka su $A = (0, 0, 1)$, $B = (\frac{7}{4}, 1, \frac{9}{4})$ i $C = (-2, -2, 3) \in H^2$. Odredite duljine stranica i mjere kutova trokuta ΔABC. Je li trokut oštrokutan, pravokutan ili tupokutan? Koliki je zbroj kutova tog trokuta?*

Zadatak 1.35. *Sijeku li se simetrale stranica hiperboličnog trokuta u jednoj točki? Ima li svaki hiperbolični trokut opisanu kružnicu?*

Zadatak 1.36. *Neka kut $\angle ABC$ nije ispružen i neka mu krakovi imaju vektore smjera u i v. Dokažite da je vektor smjera simetrale tog kuta $\frac{1}{\|u+v\|}(u+v)$.*

Zadatak 1.37. *U modelu H^2 zadani su polupravci $\vec{h}$ i $\vec{k}$ s vrhom $P = (5\sqrt{3}, \frac{16}{\sqrt{3}}, \frac{22}{\sqrt{3}})$ te vektorima smjera $u = (1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ i $v = (8, 9, 12)$. Izračunajte mjeru kuta $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ i vektor smjera simetrale tog kuta.*

Zadatak 1.38. *Sijeku li se simetrale kutova hiperboličnog trokuta u jednoj točki? Ima li svaki hiperbolični trokut upisanu kružnicu?*

Zadatak 1.39. *Dokažite dualni teorem o kosinusu (teorem 1.48) u slučaju da nožište* N *ne leži između vrhova* A *i* B.

Zadatak 1.40. *Pomoću izomorfizma između modela* H^2 *i Beltrami-Kleinova modela hiperbolične ravnine izvedite formulu za udaljenost točaka s koordinatama* (x_1, y_1) *i* (x_2, y_2) *u Beltrami-Kleinovu modelu. Nadalje, izvedite formulu za kut između pravaca* p *i* q *s jednadžbama* $n_1x+n_2y = n_3$ *i* $m_1x+m_2y = m_3$ *u Beltrami-Kleinovu modelu (pretpostavljamo da se ta dva pravca sijeku).*

Poglavlje 2

Aksiomi ravninske geometrije

"...the value of his work as a masterpiece of logic has been very grossly exaggerated." Bertrand Russell [19] o Euklidu.

Euklid je starogrčki matematičar koji je živio u Aleksandriji (Egipat) za vrijeme vladavine kralja Ptolomeja I, oko 300. godine prije nove ere. U svojem najpoznatijem djelu *Elementi* sabrao je tada poznata znanja o geometriji i organizirao ih u logičku cjelinu. Euklid prvo navodi osnovne tvrdnje, aksiome i postulate, a sve druge tvrdnje dokazuje iz osnovnih ili već dokaznanih tvrdnji. *Elementi* su se koristili kao udžbenik geometrije sve do 19. stoljeća i jedna su od najutjecajnijih knjiga u povijesti.

2.1 Euklidovi aksiomi

Na internetu je dostupno mnogo različitih verzija i prijevoda Euklidovih *Elemenata* [4, 5, 6, 11, 14]. Koristit ćemo se hrvatskim prijevodom [8]. Prva knjiga *Elemenata* počinje definicijama, a nakon toga slijedi pet postulata i pet aksioma. Postulati su osnovne geometrijske činjenice:

1. Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.
2. I da se ograničena dužina neprekidno produžuje u dužini.
3. I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.
4. I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.
5. I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Aksiomi su opće činjenice, u engleskim prijevodima *common notions*:

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.

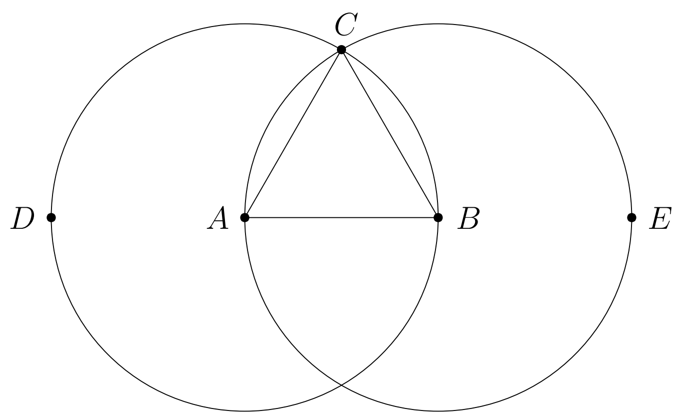
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.
5. Cjelina je veća od dijela.

U nastavku prve knjige *Elemenata* slijedi 48 propozicija s dokazima. Ostale knjige slično su organizirane, a ima ih ukupno trinaest.

S modernog stanovišta Euklidov sustav aksioma ima brojne nedostatke. Na primjer, Euklid ovako definira temeljne pojmove ravninske geometrije:

1. Točka je ono što nema dijela.
2. Crta je duljina bez širine.
3. Dužina je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj.

"Dužina" je pojam kojom Euklid označava ravnu crtu. U *Elementima* se ne spominju pravci kao neograničene ravne crte, nego se dužine potencijalno mogu neograničeno produživati (o tome govori drugi postulat). U modernim aksiomatskim teorijama temeljne pojmove kao što su točka i pravac ne definiramo, nego ih opisujemo isključivo aksiomima. Osim toga Euklid se u mnogim dokazima oslanja na slike i implicitno koristi "očite" činjenice koje nisu obuhvaćene aksiomima. To je prisutno već u dokazu prve propozicije, koji navodimo prema [8].



Slika 2.1: Dokaz Euklidove prve propozicije.

Propozicija 2.1. *Na danoj ograničenoj dužini (može se) konstruirati jednakostraničan trokut.*

Dokaz. Neka je AB dana ograničena dužina. Na dužini AB treba dakle konstruirati jedakostraničan trokut. Neka se sa središtem A i udaljenošću AB opiše krug BCD i neka se, isto tako, sa središtem B i udaljenošću BA opiše krug ACE i od točke C u kojoj se krugovi međusobno sijeku neka se do točaka A, B povuku dužine CA, CB. A budući da je točka A središte kruga CBD, AC je jednaka AB. Isto tako, budući da je točka B središte kruga CAE, BC je jednaka BA. (...) Stoga je svaka od CA, CB jednaka AB. A one stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake. $\square$

Postojanje sjecišta C kružnica CBD i ACE ne slijedi iz Euklidovih aksioma. Zaista, promotrimo model izgrađen isto kao u cjelini 1.1, ali sa skupom točaka $\mathbb{Q}^2$ umjesto $\mathbb{R}^2$. Taj model zadovoljava Euklidove aksiome, ali u njemu ne postoji jednakostraničan trokut s vrhovima $A = (0, 0)$ i $B = (1, 0)$. Točka C iz dokaza propozicije 2.1 imala bi koordinate $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$, a druga koordinata nije racionalan broj.

Dalje, Euklid svoju četvtu propoziciju o sukladnosti trokuta dokazuje s pomoću pojma gibanja, koji ne opisuje aksiomima. Moguće je aksiomatizirati pojam gibanja, ali je jednostavnije jedan od kriterija sukladnosti uzeti kao aksiom. Obično se postulira kriterij SKS, tj. upravo Euklidova četvrta propozicija. Ostali kriteriji sukladnosti trokuta tada se mogu dokazati kao teoremi. Osim toga na mnogim mjestima u *Elementima* koriste se pojmovi *između* i *s iste strane*, koji nisu definirani niti su opisani Euklidovim aksiomima. Na primjer, iskaz sedme propozicije glasi:

> *Dvjema istim dužinama ne mogu se na istoj dužini* ***s iste strane*** *uzdignuti njima jednake druge dvije odgovarajuće dužine tako da se sastaju u različitim točkama, a da imaju iste krajnje točke s početnim dužinama.*

Pojam *s iste strane* spominje se i u petom postulatu. Ovi nedostaci otklonjeni su tek na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće, u modernim sustavima aksioma ravninske geometrije. Do tada su pokušaji "popravljanja Euklida" uglavnom bili ograničeni na peti postulat.

Jedan od zahtjeva na aksiome je njihova neovisnost. Ako neki od aksioma možemo dokazati iz preostalih, onda ga ne trebamo uzeti kao aksiom, nego je to zapravo teorem. Euklidov iskaz petog postulata je kompliciran i mnogi matematičari pokušavali su ga dokazati. Navodimo dva takva pokušaja s prijelaza iz 18. u 19. stoljeće. Prvi se pripisuje njemačkom matematičaru Bernhardu Friedrichu Thibautu (1775.-1832.), koji dokazuje da je suma kutova u trokutu $180°$. Poznato je da je ta tvrdnja ekvivalentna s petim postulatom.

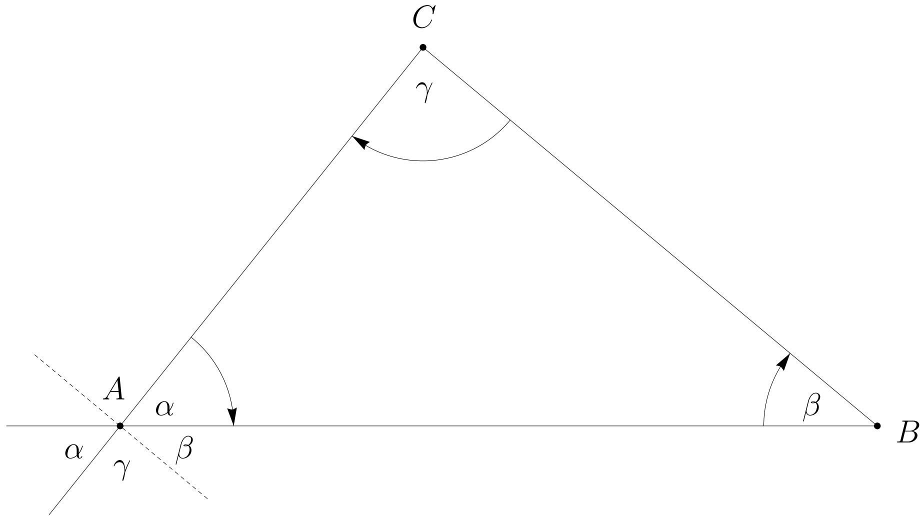
U trokutu ΔABC prvo rotiramo pravac AB oko točke B za kut β, dok se ne poklopi s pravcem BC. Zatim rotiramo taj pravac oko točke C za kut γ, dok se ne poklopi s pravcem CA. Na kraju rotiramo taj pravac oko točke C za kut γ, dok se ne poklopi s polaznim pravcem (suprotno orijentiranim). To je isto kao da smo polazni pravac rotirali za $180°$ oko točke A. Zaključujemo da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Da bismo se uvjerili kako je uzastopna rotacija oko A, B, C za α, β, γ ekvivalentna rotaciji oko A za $180°$, povlačimo paralelu s BC kroz A (slika 2.2). No postojanje i jedinstvenost paralele garantira takozvani Playfairov aksiom, koji je ekvivalentan s petim postulatom. Zato ovo nije dokaz petog postulata iz ostalih postulata i aksioma.

Drugi pokušaj pripisuje se francuskom matematičaru Adrien-Marie Legendreu (1752.-1833.), koji direktno dokazuje Playfairov aksiom:

> *Za svaki pravac ℓ i točku T koji nisu incidentni postoji jedinstveni pravac m kroz T koji ne siječe ℓ.*

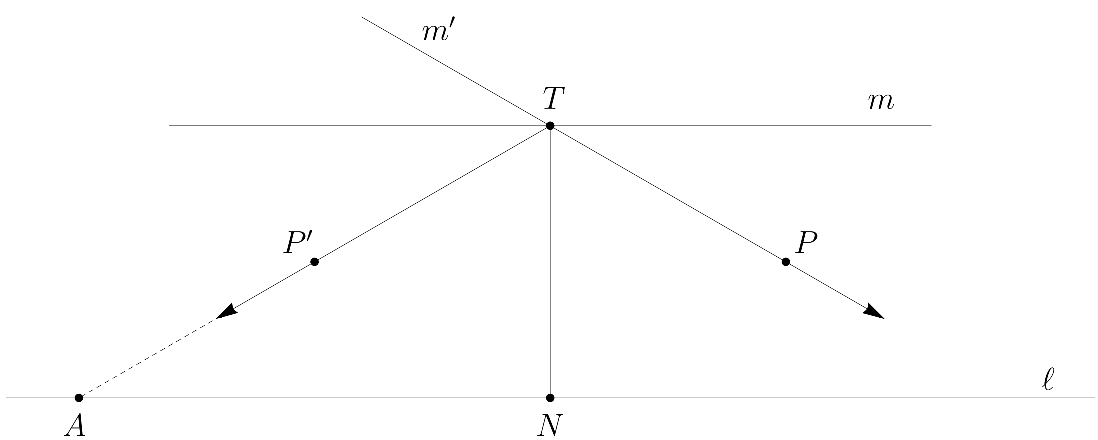
Egzistenciju paralele m dobivamo dvostrukim spuštanjem okomice. Prvo spustimo okomicu iz T na ℓ s nožištem N. Zatim povučemo okomicu na TN kroz T i označimo je s m. Budući da pravci ℓ i m imaju zajedničku normalu TN, paralelni su. Za dokaz jedinstvenosti uzmimo bilo koji drugi pravac m' (različit od m i TN) kroz točku T. Dokazujemo da taj pravac siječe ℓ, tj. da nije paralela.



Slika 2.2: Thibautov dokaz.

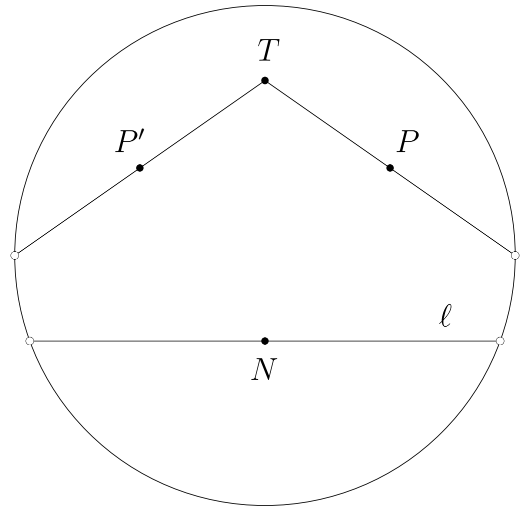
Neka je P točka na pravcu m' takva da polupravac $\overrightarrow{TP}$ leži između polupravca $\overrightarrow{TN}$ i jednog od dva polupravca na m s vrhom T. Neka je P' točka sa suprotne strane okomice TN u odnosu na P takva da je $\measuredangle NTP = \measuredangle NTP'$. Točka N leži u unutrašnjosti kuta $\angle PTP'$, a ℓ je pravac kroz N pa siječe bar jedan od krakova tog kuta. Ako siječe krak $\overrightarrow{TP}$, imamo sjecište od m' i ℓ. Pretpostavimo zato da ℓ siječe krak $\overrightarrow{TP'}$ u nekoj točki A. Neka je B jedinstvena točka na polupravcu $\overrightarrow{TP}$ takva da je $|TA| = |TB|$. Onda su trokuti ΔNTA i ΔNTB sukladni po kriteriju SKS. Stoga je $\measuredangle TNB = \measuredangle TNA$, a to je pravi kut. Zaključujemo da B leži na okomici kroz N na TN, a to je pravac ℓ. Dakle, B je sjecište pravaca m' i ℓ.

U ovom dokazu koristili smo se s mnogim tvrdnjama. Da bi dokaz bio valjan, svaka od njih treba biti neovisna od petog postulata. Dokaz egzistencije paralele dvostrukim spuštanjem okomice zaista je valjan te vrijedi u euklidskoj i u hiperboličnoj ravnini. U dokazu jedinstvenosti koristili smo se tvrdnjom da pravac kroz točku N u unutrašnjosti



Slika 2.3: Legendreov dokaz.

kuta siječe bar jedan od njegovih krakova. Tvrdnja vrijedi u euklidskoj ravnini, ali ne može se dokazati bez petog postulata ili neke njemu ekvivalentne tvrdnje. U Beltrami-Kleinovu modelu hiperbolične ravnine lako je naći protuprimjer za tu tvrdnju (slika 2.4).



Slika 2.4: Protuprimjer za tvrdnju iz Legendreova dokaza.

Mnogi pokušaji dokazivanja petog postulata išli su tako da se pretpostavi suprotno i zatim pokuša izvesti kontradikcija. Osim A.-M. Legendrea, na taj način su radili talijanski matematičar i isusovac Giovanni Girolamo Saccheri (1667.-1733.) i švicarski matematičar Johann Heinrich Lambert (1728.-1777.). Došli su vrlo daleko u izvođenju posljedica negacije petog postulata, ali nisu prepoznali da je riječ o teoremima nove, neeuklidske geometrije. Prvi matematičari koji su to shvatili su Johann Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.), Nikolai Ivanovič Lobačevski (1792.-1856.) i János Bolyai (1802.-1860.). Danas ih smatramo otkrivačima hiperbolične geometrije. Upravo zbog te nove geometrije krajem 19. stoljeća pojavila se potreba da se Euklidov sustav aksioma upotpuni i do kraja precizira. Upoznat ćemo nekoliko modernih sustava aksioma za euklidsku i hiperboličnu ravninu.

Otkrićem hiperbolične geometrije problem neovisnosti petog postulata je riješen. Nije ga moguće dokazati iz ostalih aksioma jer postoji alternativna geometrija ravnine u kojoj su svi ostali aksiomi ispunjeni, a peti postulat ne vrijedi. Dakle, Euklid je bio u pravu kad je uvrstio kompliciranu tvrdnju o paralelama među postulate.

2.2 Hilbertovi aksiomi

Prvi potpuni sustav aksioma euklidske geometrije dao je David Hilbert (1862.-1943.) u knjizi *Grundlagen der Geometrie* iz 1899. godine. Engleski prijevod iz 1902. dostupan je na internetu [12]. Hilbertovi originalni aksiomi opisuju trodimenzionalni euklidski prostor. Izložit ćemo ravninsku verziju aksioma iz knjiga [9, 10].

Nedefinirani pojmovi su *točka*, *pravac*, relacija *incidencije* između točaka i pravaca, ternarna relacija *biti između* na skupu točaka te relacije *sukladnosti* dužina i kutova. Prvo navodimo aksiome incidencije. Ako su točka T i pravac p incidentni, kažemo da T leži na p ili da p prolazi kroz T. Koristimo i terminologiju teorije skupova $T \in p$, tj. pravce shvaćamo kao skupove točaka koji su s njima incidentni.

Aksiom I_1. *Za svake dvije točke postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži.*

Aksiom I_2. *Svaki pravac sadrži bar dvije točke.*

Aksiom I_3. *Postoje tri točke koje ne leže na istom pravcu.*

Za skup točaka koje leže na istom pravcu kažemo da su *kolinearne*. Po aksiomu I_3 postoji skup od tri nekolinearne točke, tj. trokut. Iduća grupa aksioma su aksiomi uređaja, koji opisuju relaciju biti između. Činjenicu da je točka B između točaka A i C zapisujemo $A * B * C$.

Aksiom U_1. *Ako vrijedi $A*B*C$, onda su točke A, B, C kolinearne i vrijedi $C*B*A$.*

Aksiom U_2. *Za svake dvije točke B i D postoje točke A, C i E takve da vrijedi $A*B*D$, $B*C*D$ i $B*D*E$.*

Aksiom U_3. *Ako su A, B, C tri kolinearne točke, onda je točno jedna od njih između drugih dviju.*

S pomoću relacije biti između definiramo pojmove dužina i polupravac. *Dužina* $\overline{AB}$ je skup svih točaka koje su između A i B zajedno s točkama A i B, koje zovemo *krajevima* dužine. Polupravac $\overrightarrow{AB}$ je skup svih točaka T takvih da vrijedi $A * T * B$ ili $T = B$ ili $A * B * T$. Točku A zovemo *vrhom* polupravca. Sada možemo definirati što znači da su točke $A, B \notin p$ s iste strane ili s različitih strana pravca p. Ako dužina $\overline{AB}$ ne siječe p kažemo da su A i B *s iste strane* od p, a ako $\overline{AB}$ siječe p kažemo da su *s različitih strana* od p. Da bismo mogli definirati poluravnine, moramo postulirat tranzitivnost:

Aksiom U_4. *Za sve točke $A, B, C \notin p$ vrijedi:*

(a) ako su A, B s iste strane od p i B, C s iste strane od p, onda su i A, C s iste strane od p,

(b) ako su A, B s različitih strana od p i B, C s različitih strana od p, onda su A, C s iste strane od p.

Iduća grupa aksioma opisuje relacije sukladnosti. Prva tri aksioma odnose se na sukladnost dužina, što zapisujemo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ili jednostavnije $AB \cong CD$.

Aksiom S_1. *Za svake dvije točke A, B i svaki polupravac $\vec{p}$ s vrhom A' postoji jedinstvena točka $B' \in \vec{p}$ takva da je $AB \cong A'B'$.*

Aksiom S_2. *Svaka dužina sukladna je sama sebi. Ako je $AB \cong CD$ i $AB \cong EF$, onda je $CD \cong EF$.*

Aksiom S_3. *Ako vrijedi $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ i $BC \cong B'C'$, onda vrijedi $AC \cong A'C'$.*

Po aksiomu S_2 relacija sukladnosti je refleksivna i tranzitivna. Simetričnost ne moramo postulirati jer slijedi iz "nestandardnog" načina na koji smo formulirali tranzitivnost. Naime, ako vrijedi $AB \cong CD$, a zbog refleksivnosti znamo da vrijedi $AB \cong AB$, onda iz aksioma S_2 slijedi $CD \cong AB$. Dakle, sukladnost dužina je relacija ekvivalencije. Aksiom S_3 usklađuje relaciju sukladnosti s relacijom biti između.

Kutove definiramo na isti način kao u modelu H_2. *Kut* $\angle(\vec{h}, \vec{k})$ je neuređen par polupravaca $\vec{h}$, $\vec{k}$ s istim vrhom, koje zovemo *krakovima* kuta. Kut s krakovima $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ označavamo $\angle ABC$. Ako nam krakovi nisu bitni, kut s vrhom B kratko ćemo označavati $\angle B$. Za sukladnost kutova koristimo istu oznaku $\cong$.

Aksiom S_4**.** *Za svaki kut* $\angle ABC$ *i svaki polupravac* $\overrightarrow{B'A'}$ *postoji jedinstveni polupravac* $\overrightarrow{B'C'}$ *u svakoj od poluravnina određenih pravcem* $A'B'$ *takav da je* $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Aksiom S_5**.** *Svaki kut sukladan je sam sebi. Ako je* $\angle A \cong \angle B$ *i* $\angle A \cong \angle C$*, onda je* $\angle B \cong \angle C$.

Kao i za dužine, iz aksioma S_5 slijedi da je sukladnost kutova relacija ekvivalencije. Za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ kažemo da su *sukladni* ako se između njihovih vrhova može uspostaviti bijekcija takva da su odgovarajuće stranice i odgovarajući kutovi sukladni. Kad pišemo $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, podrazumijevamo da je ta bijekcija $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ i $C \leftrightarrow C'$. Dakle, redoslijed u kojem pišemo vrhove je bitan! Zadnji aksiom o sukladnosti je kriterij SKS za sukladnost trokuta. Možemo ga shvatiti kao aksiom koji usklađuje sukladnost dužina i sukladnost kutova.

Aksiom S_6**.** *Ako su dvije stranice i kut među njima dvaju trokuta sukladni, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Primijetimo da nismo morali postulirati aksiom o "zbrajanju kutova" analogan aksiomu S_3 za dužine, jer slijedi iz do sada uvedenih aksioma (zadatak 2.5). Još nam treba aksiom s pomoću kojeg dokazujemo kontinuiranost figura euklidske geometrije, tj. potpunost u topološkom smislu. Postuliramo takozvani Dedekindov aksiom.

Aksiom D**.** *Neka je skup točaka pravca particioniran na dva disjunktna neprazna podskupa* S_1 *i* S_2 *tako da niti jedna točka iz* S_1 *nije između neke dvije točke iz* S_2 *i obratno. Tada postoji točka* O *na tom pravcu takva da je jedan od ta dva podskupa polupravac s vrhom* O*, a drugi je njegov komplement.*

Iz ovog aksioma npr. slijedi da se kružnice u dokazu Euklidove prve propozicije 2.1 sijeku. Zadnji aksiom je aksiom o paralelama. Postuliramo slabiju tvrdnju od Playfairova aksioma jer egzistencija paralele slijedi iz prethodnih aksioma.

Aksiom P**.** *Za svaki pravac* ℓ *i točku* $T \notin \ell$ *postoji najviše jedan pravac kroz* T *koji ne siječe* ℓ.

Ovo je euklidska verzija aksioma o paralelama. Za hiperboličnu ravninu postuliramo negaciju aksioma P, a sve ostale aksiome uzimamo iste.

2.3 Birkhoffovi aksiomi

Još jedan sustav aksioma ravninske geometrije dao je američki matematičar George David Birkhoff (1884.-1944.) u članku [2] iz 1932. Kasnije ga je koristio u knjizi [3] (prvo izdanje je iz 1940.). Izložit ćemo varijantu Birkhoffovih aksioma iz knjige [20].

Nedefinirani pojmovi su *točka*, *pravac* i relacija *incidencije* između točaka i pravaca. Pravce shvaćamo kao skupove točaka i koristimo uobičajenu notaciju: $A \in p$ ako točka leži na pravcu, $p_1 \cap p_2$ za presjek pravaca p_1 i p_2 itd. Uz to je zadana funkcija koja parovima točaka pridružuje realan broj koji predstavlja njihovu *udaljenost* i funkcija koja kutu pridružuje broj iz $[0, \pi]$ koji predstavlja njegovu *mjeru*.

Aksiom 1. *Za svake dvije točke A i B postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži.*

Taj pravac zovemo *spojnicom* od A i B i označavamo AB. Vidjeli smo da aksiom vrijedi u modelu euklidske ravnine E^2 (propozicija 1.1) i u modelu hiperbolične ravnine H^2 (propozicija 1.21). U modelu sfere S^2 za parove antipodalnih točaka ne vrijedi jedinstvenost (propozicija 1.7), ali njihovim identificiranjem dobivamo projektivnu ravninu $PG(2, \mathbb{R})$ u kojoj također vrijedi aksiom 1.

Presjek dvaju pravaca p_1 i p_2 sadrži najviše jednu točku. Ako $p_1 \cap p_2$ sadrži dvije točke $A \neq B$, onda zbog jedinstvenosti u aksiomu 1 vrijedi $p_1 = p_2$. U slučaju kad je $p_1 \cap p_2$ prazan skup u nastavku **nećemo** govoriti da su pravci p_1 i p_2 paralelni, jer je pojam paralelnosti u hiperboličnoj ravnini kompliciraniji. Relacija disjunktnosti na skupu svih pravaca hiperbolične ravnine nije relacija ekvivalencije.

Aksiom 2. *Funkcija koja parovima točaka pridružuje njihovu udaljenost je metrika.*

Udaljenost točaka A i B označavamo $|AB|$. U modelu E^2 definirana je formulom (1.2), na sferi S^2 formulom (1.4), a u modelu H^2 formulom (1.9). Vidjeli smo da je to zaista metrika (teorem 1.30).

Propozicija 2.2. *Za sve točke A, B i C vrijedi* $\big||AB| - |BC|\big| \leq |AC| \leq |AB| + |BC|$.

Dokaz. Desna nejednakost je nejednakost trokuta iz definicije metrike. Lijevu nejednakost dobivamo iz nejednakosti trokuta tako da prebacimo jedan član na lijevu stranu i permutiramo točke: $|AB| \leq |AC| + |CB| \Rightarrow |AB| - |BC| \leq |AC|$, $|BC| \leq |BA| + |AC| \Rightarrow -|AB| + |BC| \leq |AC|$. Iz ovih dviju nejednakosti slijedi $\big||AB| - |BC|\big| \leq |AC|$. $\square$

Aksiom 3. *Za svaki pravac p postoji bijekcija $x : p \to \mathbb{R}$ takva da za sve točke $A, B \in p$ vrijedi $|AB| = |x(A) - x(B)|$.*

Bijekciju x s tim svojstvom zovemo *koordinatizacijom* pravca. Koordinatizacija nije jedinstvena, ali postoji jednostavna veza između svake dvije koordinatizacije istog pravca.

Lema 2.3. *Svaka izometrija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je oblika $f(x) = ax + b$ za $a \in \{-1, 1\}$ i $b \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $f(0) = b$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - b$. Funkcija g je također izometrija, pa je i kompozicija $h = g \circ f$ izometrija sa svojstvom $h(0) = 0$. Iz toga slijedi $|h(x)| = |h(x) - h(0)| = |x - 0| = |x|$, tj. $h(x) = \pm x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dokažimo da je $h(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ili $h(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vrijednost $h(1)$ može biti 1 ili -1. Pretpostavimo da je $h(1) = 1$

i $h(x) = -x$ za neki $x \in \mathbb{R}$. Tada je $|x-1| = |h(x) - h(1)| = |-x-1| = |x+1|$, a iz toga slijedi $x = 0$. Prema tome, u slučaju $h(1) = 1$ vrijedi $h(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analogno vidimo da u slučaju $h(1) = -1$ vrijedi $h(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dakle, funkcija h je oblika $h(x) = ax$ za $a \in \{-1, 1\}$, a iz toga slijedi da je f oblika $f(x) = ax + b$. □

Propozicija 2.4. *Za svake dvije koordinatizacije $x_1 : p \to \mathbb{R}$ i $x_2 : p \to \mathbb{R}$ postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $x_2(A) = x_1(A) + b$ za svaku točku $A \in p$, ili $x_2(A) = -x_1(A) + b$ za svaku točku $A \in p$.*

Dokaz. Funkcija $x_2 \circ x_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je izometrija. Primijenimo na nju prethodnu lemu. □

Inverznu funkciju koordinatizacije $x^{-1} : \mathbb{R} \to p$ nazivamo *parametrizacijom* pravca p. Parametrizacije pravaca u modelu E^2 su oblika (1.15), a u modelu H^2 oblika (1.14). Inverzi tih parametrizacija su tražene koordinatizacije i imaju svojstvo iz aksioma 3 (propozicija 1.31). Ovaj aksiom nam govori da pravci u euklidskoj i hiperboličnoj ravnini "izgledaju" kao skup realnih brojeva. Metrika iz aksioma 2 restringirana na pravce podudara se s uobičajenom metrikom definiranom kao apsolutna vrijednost razlike $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Osim toga aksiom 3 nam omogućuje prenošenje linearnog uređaja s $\mathbb{R}$ na pravce, tj. definiranje ternarne relacije "biti između" na skupu točaka (zadatak 2.6). Uočimo da geometrija sfere iz cjeline 1.2 i projektivna geometrija ne zadovoljavaju aksiom 3. Pravci na sferi i u projektivnoj ravnini ne izgledaju kao skup $\mathbb{R}$, nego kao kružnice.

Neka su A, B dvije točke i neka pravac $p = AB$ ima koordinatizaciju $x : p \to \mathbb{R}$. Ako su $a = x(A)$ i $b = x(B)$ koordinate tih točaka, možemo pretpostaviti da je $a < b$ (u suprotnom zamijenimo koordinatizaciju x sa $-x$). *Dužina* s krajevima A i B je skup točaka

$$\overline{AB} = \{T \in AB \mid a \leq x(T) \leq b\}.$$

U slučaju $A = B$ stavljamo $\overline{AA} = \{A\}$. Za dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kažemo da su *sukladne* ako je $|AB| = |CD|$. Sukladnost dužina je relacija ekvivalencije i ima svojstva iskazana Hilbertovim aksiomima S_1 i S_3. Pritom je *polupravac* s vrhom A skup točaka oblika

$$\overrightarrow{AB} = \{T \in AB \mid a < x(T)\}. \tag{2.1}$$

Dokažimo npr. svojstvo S_1.

Propozicija 2.5. *Za svake dvije točke A, B i svaki polupravac $\vec{p}$ s vrhom A' postoji jedinstvena točka $B' \in \vec{p}$ takva da je $|AB| = |A'B'|$.*

Dokaz. Neka je $x : p \to \mathbb{R}$ koordinatizacija pravca na kojem leži polupravac $\vec{p}$ takva da je $x(A') = 0$ i $\vec{p} = \{T \in p \mid x(T) > 0\}$. Neka je $B' = x^{-1}(|AB|)$. Tada je $B' \in \vec{p}$ i po aksiomu 3 vrijedi $|A'B'| = |x(A') - x(B')| = |0 - |AB|| = |AB|$. Točka B' s tim svojstvima očito je jedinstvena. □

Aksiom 4. *Za svaki pravac p postoje dva skupa točaka $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ koje zovemo* poluravninama *takva da $\{p, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ čini particiju skupa svih točaka i vrijedi:*

(a) za svake dvije točke A, B iz iste poluravnine dužina $\overline{AB}$ ne siječe p,

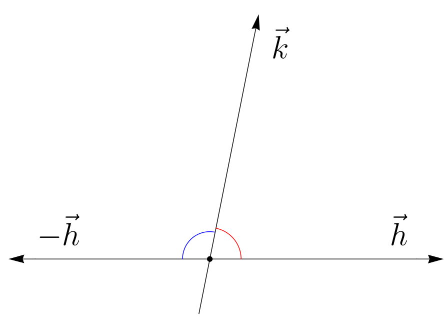
(b) za svake dvije točke A, B iz različitih poluravnina dužina $\overline{AB}$ siječe p.

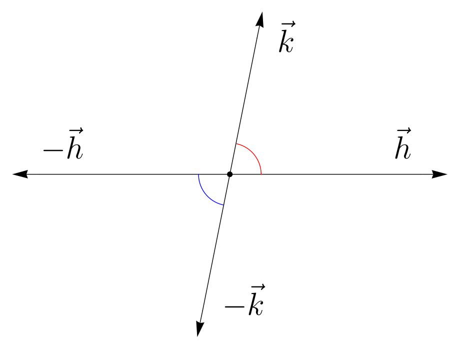
U modelu H^2 poluravnine određene pravcem $p = \{x \in H^2 \mid b(n,x) = 0\}$ su $\mathcal{P}_1 = p^+ = \{x \in H^2 \mid b(n,x) > 0\}$ i $\mathcal{P}_2 = p^- = \{x \in H^2 \mid b(n,x) < 0\}$. Zbog teorema 1.37 zadovoljavaju svojstva (a) i (b) iz aksioma 4. Aksiom vrijedi i u modelu E^2: pravcu s jednadžbom $\langle n,x\rangle = \beta$ odgovaraju poluravnine zadane nejednadžbama $\langle n,x\rangle > \beta$ i $\langle n,x\rangle < \beta$. Za točke A, B koje pripadaju istoj poluravnini ($A, B \in \mathcal{P}_1$ ili $A, B \in \mathcal{P}_2$) kažemo da su *s iste strane* pravca p, a ako pripadaju različitim poluravninama ($A \in \mathcal{P}_1$, $B \in \mathcal{P}_2$ ili obrnuto) kažemo da su *sa suprotnih strana* pravca p.

Polupravac $\overrightarrow{AB}$ s vrhom A definirali smo s pomoću koordinatizacije (2.1). *Suprotni polupravac* je

$$-\overrightarrow{AB} = \{T \in AB \mid a > x(T)\}.$$

Kao i prije, *kut* definiramo kao neuređen par polupravaca s istim vrhom $\angle(\vec{h},\vec{k})$. Ako se pravci h i k sijeku u točki A i ona ih dijeli na parove suprotnih polupravaca $\vec{h}$, $-\vec{h}$ i $\vec{k}$, $-\vec{k}$, tada kutove $\angle(\vec{h},\vec{k})$ i $\angle(-\vec{h},\vec{k})$ zovemo *sukutima*, a kutove $\angle(\vec{h},\vec{k})$ i $\angle(-\vec{h},-\vec{k})$ zovemo *vršnim kutovima* (slika 2.5).





Slika 2.5: Sukuti (lijevo) i vršni kutovi (desno).

Oznaka $\angle BAC$ znači kut s krakovima $\vec{h} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{k} = \overrightarrow{AC}$. Ako točke A, B i C nisu kolinearne, *unutrašnjost* kuta $\angle BAC$ čine sve točke koje su s iste strane pravca $h = AB$ kao točka C i s iste strane pravca $k = AC$ kao točka B. U idućem aksiomu postuliramo postojanje i svojstva kutne mjere.

Aksiom 5. *Svakom kutu $\angle(\vec{h},\vec{k})$ pridružen je broj iz $[0,\pi]$ koji zovemo* mjerom kuta *i označavamo $\measuredangle(\vec{h},\vec{k})$ tako da vrijedi:*

(a) Ako se krakovi $\vec{h}$ i $\vec{k}$ podudaraju, mjera kuta je 0. Ako su krakovi $\vec{h}$ i $\vec{k}$ suprotni, mjera kuta je π.

(b) Zbroj mjera sukuta je π.

(c) Ako je $\vec{j}$ polupravac s istim vrhom kao $\vec{h}$, $\vec{k}$ koji se nalazi u unutrašnjosti kuta $\angle(\vec{h},\vec{k})$, onda je $\measuredangle(\vec{h},\vec{k}) = \measuredangle(\vec{h},\vec{j}) + \measuredangle(\vec{j},\vec{k})$.

(d) Neka je $\vec{k}$ polupravac na pravcu k s vrhom T i $\mathcal{P}$ jedna od poluravnina određena s k. Skup svih polupravaca $\vec{j}$ u $\mathcal{P}$ s vrhom T je u bijektivnoj korespondenciji s brojevima iz $\langle 0,\pi\rangle$, tako da je kutu $\angle(\vec{k},\vec{j})$ pridružena njegova mjera.

(e) Ako je polupravac $\vec{j}$ iz (d) određen kao $\vec{j} = \overrightarrow{TP}$, onda mjera kuta $\angle(\vec{k}, \vec{j})$ ovisi neprekidno o izboru točke $P \in \mathcal{P}$.

U modelu E^2 kutnu mjeru definirali smo formulom (1.16), a u modelu H^2 formulom (1.17). Svojstvo (a) provjerili smo odmah nakon definicije. Svojstva (b) i (c) su aditivnost kutne mjere i provjerili smo ih u teoremima 1.39 i 1.40. Provjerimo još i svojstva (d) i (e) iz aksioma 5. Neka polupravac $\vec{k}$ s vrhom T ima parametrizaciju $t \mapsto (\operatorname{ch} t)T + (\operatorname{sh} t)u$, $t \geq 0$. Pritom je T jedinični vremenski vektor ($b(T,T) = -1$), u je jedinični prostorni vektor smjera ($b(u,u) = 1$) i vrijedi $b(T,u) = 0$. Neka je $n = T \times u$ pol pravca k. Za $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ neka je $v_\alpha = (\cos\alpha)u + (\sin\alpha)n$ i $\vec{j}_\alpha$ polupravac s parametrizacijom $t \mapsto (\operatorname{ch} t)T + (\operatorname{sh} t)v_\alpha$, $t \geq 0$. Vrijedi $b(v_\alpha, v_\alpha) = \cos^2\alpha\, b(u,u) + 2\cos\alpha \sin\alpha\, b(u,n) + \sin^2\alpha\, b(n,n) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ i $b(T, v_\alpha) = \cos\alpha\, b(T,u) + \sin\alpha\, b(T,n) = 0$, pa je v_α zaista vektor smjera. Točke na polupravcu $\vec{j}_\alpha$ pripadaju poluravnini $\mathcal{P} = k^+$: $b(n, (\operatorname{ch} t)T + (\operatorname{sh} t)v_\alpha) = \operatorname{sh} t\, b(n, v_\alpha) = \operatorname{sh} t\, \sin\alpha > 0$. Ako želimo drugu poluravninu, uzmemo vektor smjera $v_\alpha = (\cos\alpha)u - (\sin\alpha)n$. U oba slučaja mjera kuta $\angle(\vec{k}, \vec{j}_\alpha)$ je α, jer vrijedi $b(u, v_\alpha) = \cos\alpha$. Pridruživanje $\alpha \mapsto \vec{j}_\alpha$ je bijekcija između brojeva $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ i polupravaca u $\mathcal{P}$ s vrhom T. Ako je $\vec{j} = \overrightarrow{TP}$, kutna mjera zadana je formulom

$$\measuredangle(\vec{k}, \vec{j}) = \arccos b\left(u, \tfrac{T\times P}{\|T\times P\|} \times T\right) = \arccos b\left(T \times u, \tfrac{T\times P}{\|T\times P\|}\right) = \arccos \frac{b\left((T \times u) \times T, P\right)}{\|T \times P\|}$$

i ovisi neprekidno o P. Ista svojstva ima i kutna mjera u modelu E^2.

Za kutove $\angle BAC$ i $\angle B'A'C'$ kažemo da su *sukladni* ako imaju istu mjeru $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Sukladnost kutova je relacija ekvivalencije i ima svojstvo iz Hilbertovog aksioma S_4 (zadatak 2.7). Sukladnost trokuta definiramo isto kao u cjelini 2.2 i također uzimamo kriterij SKS kao aksiom.

Aksiom 6. *Ako su dvije stranice i kut među njima dvaju trokuta sukladni, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Na kraju navodimo euklidsku i hiperboličnu varijantu aksioma o paralelama.

Aksiom 7E. *Za svaki pravac ℓ i točku $T \notin \ell$ postoji najviše jedan pravac kroz T koji ne siječe ℓ.*

Aksiom 7H. *Postoje pravac ℓ i točka $T \notin \ell$ takvi da bar dva pravca kroz T ne sijeku ℓ.*

Aksiom 7H je negacija aksioma 7E i zato je kvantificiran egzistencijalno (**postoje** pravac ℓ i točka $T \ldots$), a ne univerzalno kao aksiom 7E (**za svaki** pravac ℓ i točku $T \ldots$). Kasnije ćemo dokazati da tvrdnja aksioma 7H također vrijedi za svaki pravac ℓ i točku $T \notin \ell$ hiperbolične ravnine.

Zadaci

Zadatak 2.1. *U modelu H^2 nađite protuprimjer za sljedeću tvrdnju. Neka je $\angle PTP'$ kut i N točka u njegovoj unutrašnjosti. Onda svaki pravac ℓ kroz N siječe bar jedan od krakova $\overrightarrow{TP}$, $\overrightarrow{TP'}$.*

Zadatak 2.2. *S pomoću Hilbertovih aksioma i pojmova koje smo definirali u cjelini 2.2 definirajte pojam poluravnine.*

Zadatak 2.3. *Pokažite da je zahtjev simetričnosti binarne relacije neovisan od zahtjeva refleksivnosti i tranzitivnosti. Drugim riječina, nađite primjer binarne relacije koja je refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična.*

Zadatak 2.4. *Pokažite da je Hilbertov aksiom U_4 neovisan od prethodnih aksioma. Definirajte model u kojem vrijede aksiomi I_1, I_2, I_3 i U_1, U_2, U_3, ali ne vrijedi U_4.*

Zadatak 2.5. *Formulirajte i dokažite svojstvo "zbrajanja kutova" analogno Hilbertovom aksiomu S_3 za dužine.*

Zadatak 2.6. *Uz pretpostavku da vrijede Birkhoffovi aksiomi iz cjeline 2.3 definirajte ternarnu relaciju "biti između" na skupu točaka. Dokažite da je definicija dobra i da relacija ima svojstva iskazana Hilbertovim aksiomima U_1, U_2 i U_3.*

Zadatak 2.7. *Ako vrijede Birkhoffovi aksiomi, sukladnost dužina $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ definiramo kao jednakost njihovih duljina $|AB| = |A'B'|$, a sukladnost kutova $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ kao jednakost njihovih mjera $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Dokažite da sukladnost dužina zadovoljava Hilbertov aksiom S_3, a sukladnost kutova Hilbertov aksiom S_4.*

Zadatak 2.8. *Vrijedi li u modelu sfere S^2 aksiom 4? A u projektivnoj ravnini $PG(2,\mathbb{R})$?*

Zadatak 2.9. *Definirajte polovište dužine. Dokažite da svaka dužina ima jedinstveno polovište.*

Zadatak 2.10. *Definirajte vršne kutove. Dokažite da vršni kutovi imaju istu mjeru.*

Poglavlje 3

Teoremi neutralne geometrije

> *"A parallelákat azon az útan ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig – megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne... [Do not try the parallels in that way: I know that way all along. I have measured that bottomless night, and all the light and all the joy of my life went out there...]"* Farkas Bolyai u pismu sinu Jánosu, 4. travnja 1820.

Teoreme koje možemo dokazati samo s pomoću prvih šest aksioma iz cjeline 2.3, bez pozivanja na aksiom o paralelama, nazivamo teoremima neutralne ili apsolutne geometrije.[1] To su teoremi koji vrijede u euklidskoj i u hiperboličnoj ravnini. Euklid je u prvoj knjizi *Elemenata* dokazao prvih 28 od 48 propozicija bez pozivanja na peti postulat. Sve te propozicije su neutralni teoremi.

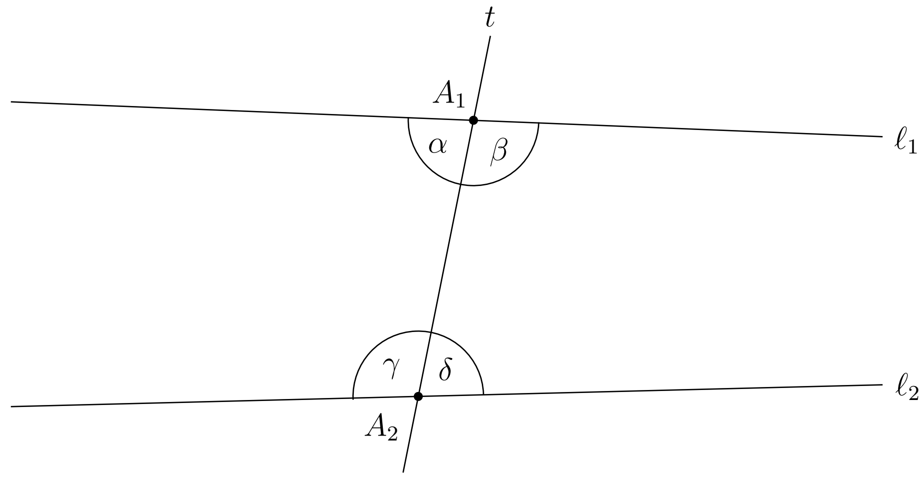
3.1 Osnovni neutralni teoremi

Prvi od neutralnih teorema koje ćemo dokazati je teorem o nasuprotnim unutarnjim kutovima. Objasnimo pojmove iz njegova iskaza. *Transverzala* dvaju pravaca ℓ_1 i ℓ_2 je pravac t koji siječe ta dva pravca. Označimo odgovarajuća sjecišta A_1 i A_2. Transverzala i pravac ℓ_1 određuju četiri kuta s vrhom u sjecištu A_1 (ne računajući ispružene kutove i nulkutove). Dva kuta kojima je krak $\overrightarrow{A_1A_2}$ zovemo *unutarnjim kutovima*, a druga dva kuta, kojima je krak suprotni polupravac $-\overrightarrow{A_1A_2}$, *vanjskim kutovima*. Analogno, unutarnji kutovi s vrhom A_2 imaju krak $\overrightarrow{A_2A_1}$, a vanjski imaju krak $-\overrightarrow{A_2A_1}$.

Neka je dan unutanji kut s vrhom A_1 i unutarnji kut s vrhom A_2. Kažemo da su ta dva kuta *nasuprotna* ako im krakovi koji nisu na pravcu A_1A_2 leže sa suprotnih strana tog pravca. Na primjer, od unutarnjih kutova označenih α, β, γ i δ na slici 3.1, α, δ su nasuprotni i β, γ su nasuprotni.

Teorem 3.1 (O nasuprotnim unutarnjim kutovima)**.** *Ako transverzala siječe dva pravca tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni, onda se ta dva pravca ne sijeku.*

[1] Termin "apsolutna geometrija" uveo je János Bolyai 1832. godine.



Slika 3.1: Nasuprotni unutarnji kutovi.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da se pravci ℓ_1 i ℓ_2 sijeku u nekoj točki P. Neka su $\angle A_2A_1P$ i $\angle A_1A_2Q$ nasuprotni unutarnji kutovi koji su sukladni, tj. mjere im se podudaraju:

$$\measuredangle A_2A_1P = \measuredangle A_1A_2Q. \tag{3.1}$$

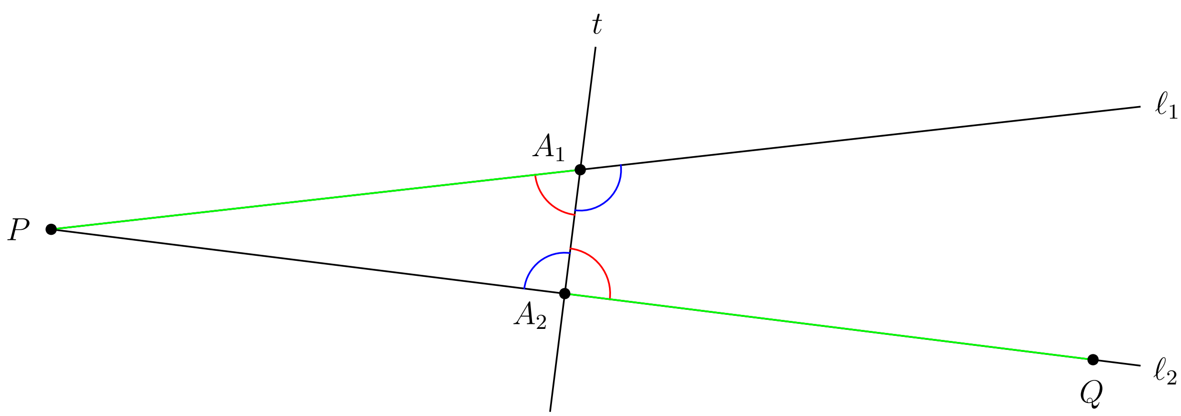
Po propoziciji 2.5 točku Q na polupravcu $-\overrightarrow{A_2P}$ možemo izabrati tako da bude $|PA_1| = |QA_2|$. Tada su po aksiomu 6 (kriteriju SKS) trokuti ΔPA_1A_2 i ΔQA_2A_1 sukladni. Posljedično, kutovi $\angle PA_2A_1$ i $\angle QA_1A_2$ su sukladni:

$$\measuredangle PA_2A_1 = \measuredangle QA_1A_2. \tag{3.2}$$

Kutovi $\angle PA_2A_1$ i $\angle A_1A_2Q$ su sukuti, pa po aksiomu 5 (b) vrijedi

$$\measuredangle PA_2A_1 + \measuredangle A_1A_2Q = \pi. \tag{3.3}$$

Iz (3.1), (3.2) i (3.3) slijedi $\measuredangle QA_1A_2 + \measuredangle A_2A_1P = \pi$, pa zbog bijektivnosti u aksiomu 5 (d) kutovi $\angle QA_1A_2$ i $\angle A_2A_1P$ moraju biti sukuti. To znači da su krakovi $\overrightarrow{A_1P}$ i $\overrightarrow{A_1Q}$ suprotni



Slika 3.2: Dokaz teorema 3.1.

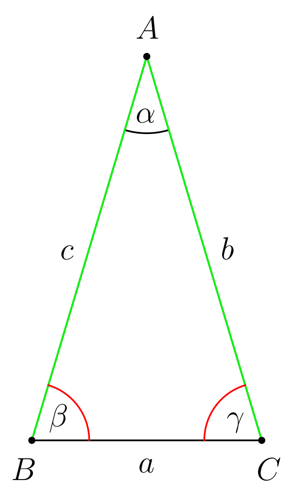
polupravci, tj. točke P, A_1 i Q su kolinearne. Budući da je $\ell_1 = PA_1$ i $\ell_2 = PQ$, iz aksioma 1 dobivamo $\ell_1 = \ell_2$, kontradikciju s pretpostavkom da su to dva pravca. Dakle, pravci ℓ_1 i ℓ_2 se ne sijeku. □

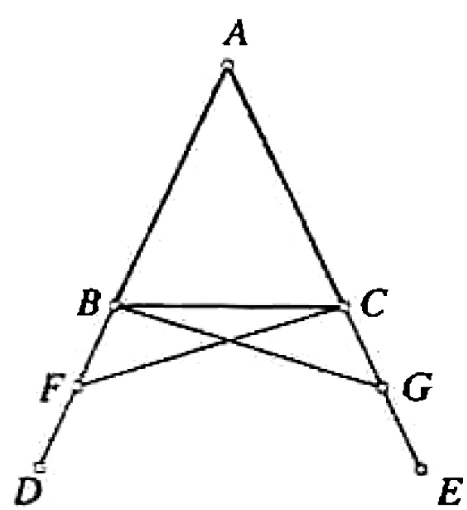
U dokazu smo se pozivali na sve aksiome osim aksioma o paralelama 7E i 7H. Implicitno smo koristili i aksiom 4 već u iskazu teorema, kad smo govorili o nasuprotnim kutovima. U euklidskoj ravnini vrijedi i obrat teorema o nasuprotnim unutarnjim kutovima: ako se pravci ℓ_1 i ℓ_2 ne sijeku, onda ih svaka transverzala siječe tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni. Međutim, u hiperboličnoj ravnini obrat ne vrijedi (zadatak 3.1).

Peta propozicija iz Euklidovih *Elemenata* poznata je kao "pons asinorum" (magareći most). Dokaz u *Elementima* je dosta kompliciran i samo bistri čitatelji mogu preći na drugu stranu. Osim toga ilustracija Euklidova dokaza podsjeća na most (slika 3.3 desno). Dat ćemo jednostavniji dokaz koji se pripisuje Paposu iz Aleksandrije (oko 290.-350.).

Propozicija 3.2 ("Pons asinorum")**.** *Ako su dvije stranice trokuta ΔABC sukladne, onda su i njima nasuprotni kutovi sukladni.*

Dokaz. Uz standardne oznake za duljine stranica $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ i mjere kutova $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle ACB$, pretpostavimo da vrijedi $b = c$. Onda je $|BA| = |CA|$, $|AC| = |AB|$ i $\measuredangle BAC = \measuredangle CAB$ pa po aksiomu 6 vrijedi sukladnost trokuta $\Delta BAC \cong \Delta CAB$. Stoga je $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$, tj. $\beta = \gamma$. □





Slika 3.3: Dokazi propozicije 3.2. Desna slika preuzeta je iz [8].

Idući neutralni teorem govori da možemo spustiti jedinstvenu okomicu iz svake točke na svaki pravac. Vidjeli smo da to vrijedi u modelu E^2 (propozicija 1.6) i u modelu H^2 (propozicija 1.27).

Teorem 3.3. *Za svaki pravac ℓ i točku P postoji jedinstveni pravac kroz P koji je okomit na ℓ.*

Dokaz. Prvo dokazujemo jednostavniji slučaj kad točka P leži na pravcu ℓ. Tada tvrdnja slijedi direktno iz aksioma 5 (d). Izaberemo jedan od polupravaca s vrhom P na pravcu ℓ i označimo ga $\vec{\ell}$ te jednu od poluravnina određenih pravcem ℓ. U toj poluravnini postoji jedinstveni polupravac $\vec{m}$ s vrhom P takav da je $\measuredangle(\vec{\ell},\vec{m}) = \frac{\pi}{2}$. Pravac m na kojem leži $\vec{m}$ je jedinstvena okomica kroz P na ℓ.

Sad pretpostavimo da točka P ne leži na pravcu ℓ. Neka je $x : \ell \to \mathbb{R}$ koordinatizacija pravca ℓ. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = |Px^{-1}(t)|$ i u nekoliko koraka dokazujemo njezina svojstva i tvrdnje teorema.

Korak 1. Funkcija f je neprekidna.

Za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ dokazat ćemo da je f neprekidna u a. Neka je $t \in \mathbb{R}$ i označimo odgovarajuće točke na pravcu ℓ s $A = x^{-1}(a)$ i $T = x^{-1}(t)$. Po propoziciji 2.2 vrijedi

$$|PT| - |TA| \leq \big||PT| - |TA|\big| \leq |PA| \leq |PT| + |TA|.$$

Iz definicije funkcije f i aksioma 3 to možemo zapisati kao

$$f(t) - |t-a| \leq f(a) \leq f(t) + |t-a| \;\; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; -|t-a| \leq f(a) - f(t) \leq |t-a| \;\; \Rightarrow \;\; |f(t) - f(a)| \leq |t-a|.$$

Vidimo da $|f(t) - f(a)| \to 0$ kad $t \to a$, pa je f neprekidna u a.

Korak 2. $f(t) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$ ili $t \to -\infty$.

Uzmimo opet čvrstu točku $A \in \ell$ s koordinatom $a = x(A)$ i proizvoljnu točku $T \in \ell$ s koordinatom $t = x(T)$. Iz lijeve nejednakosti u propoziciji 2.2 dobivamo

$$|AT| - |PA| \leq \big||PA| - |AT|\big| \leq |PT|,$$

odnosno

$$f(t) = |PT| \geq |AT| - |PA| = |t-a| - f(a) \geq |t| - |a| - f(a).$$

U zadnjoj nejednakosti koristili smo $|t| - |a| \leq |t-a|$, što je lijeva nejednakost iz propozicije 2.2 za metriku na $\mathbb{R}$. U izrazu koji smo dobili na kraju a je konstanta, pa taj izraz teži u $+\infty$ kad $|t| \to +\infty$. Slijedi da i $f(t) \to +\infty$ kad $|t| \to +\infty$.

Korak 3. Funkcija f poprima globalni minimum.

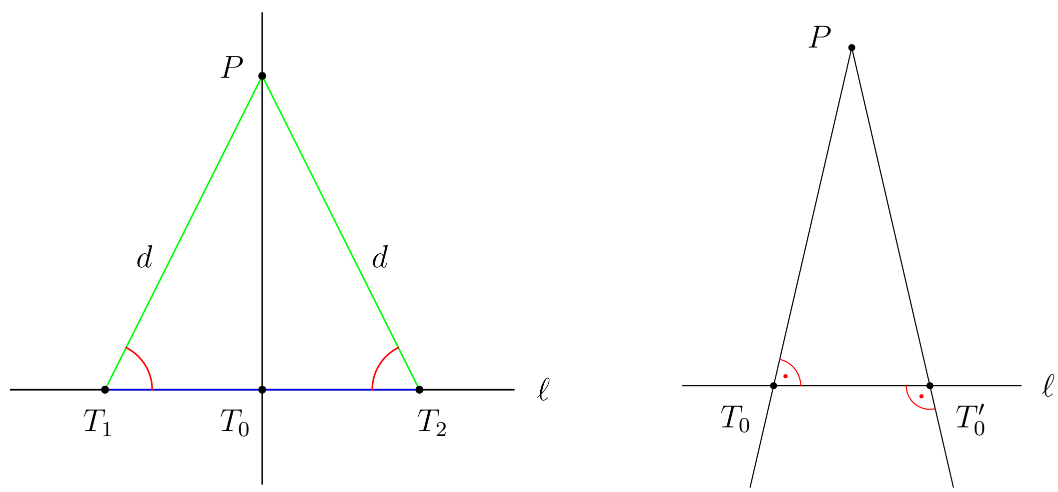
Neka je M bilo koja vrijednost funkcije f. Zbog 2. svojstva postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $f(t) > M$ za sve $t < a$ i postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $f(t) > M$ za sve $t > b$. Budući da f poprima vrijednost M, mora biti $a < b$. Izvan segmenta $[a, b]$ funkcija f poprima vrijednosti strogo veće od M, a na tom segmentu zbog neprekidnosti i Weierstrassova teorema poprima minimalnu vrijednost $f(t_0) \leq M$ za neki $t_0 \in [a, b]$. Zaključujemo da je t_0 točka globalnog minimuma funkcije f.

Korak 4. Egzistencija okomice.

Neka je $d_0 = f(t_0)$ globalni minimum funkcije f. Zbog neprekidnosti, 2. svojstva i Bolzanova teorema, za svaki $d > d_0$ postoje $t_1 < t_0$ i $t_2 > t_0$ takvi da je $f(t_1) = f(t_2) = d$. Neka su $T_1 = x^{-1}(t_1)$ i $T_2 = x^{-1}(t_2)$ odgovarajuće točke na pravcu ℓ i $T_0 = x^{-1}(\frac{t_1+t_2}{2})$ polovište dužine $\overline{T_1T_2}$. Trokut ΔPT_1T_2 je jednakokračan, pa su po propoziciji 3.2 kutovi uz osnovicu sukladni: $\measuredangle PT_1T_2 = \measuredangle PT_2T_1$. Sad po aksiomu 6 možemo zaključiti da su trokuti ΔPT_1T_0 i ΔPT_2T_0 sukladni, iz čega slijedi sukladnost kutova $\angle PT_0T_1$ i $\angle PT_0T_2$. To su sukuti, pa im je po aksiomu 5 (b) mjera $\measuredangle PT_0T_1 = \measuredangle PT_0T_2 = \frac{\pi}{2}$. Dakle, PT_0 je okomica na ℓ kroz P.

Korak 5. Jedinstvenost okomice.

Pretpostavimo da postoji još jedna okomica PT_0' s nožištem $T_0' \neq T_0$. Pravac ℓ je transverzala okomica PT_0 i PT_0' i siječe ih tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni (mjera im je $\frac{\pi}{2}$). Po teoremu 3.1 okomice se ne sijeku, a obje prolaze kroz P. Dakle, postoji samo jedna okomica. □



Slika 3.4: Egzistencija i jedinstvenost okomice.

Zbog jedinstvenosti okomice možemo zaključiti još o svojstvima funkcije f iz dokaza prethodnog teorema. Minimum postiže upravo u točki $t_0 = \frac{t_1+t_2}{2}$, a točke $t_1 < t_0 < t_2$ u kojima poprima vrijednost $f(t_1) = f(t_2) = d > d_0$ su jedinstvene. Naime, kad bi postojala neka treća točka $t_3 \neq t_1, t_2$ sa $f(t_3) = d$, isto kao u 4. koraku zaključili bismo da su $x^{-1}(\frac{t_1+t_3}{2})$ i $x^{-1}(\frac{t_2+t_3}{2})$ nožišta okomica iz P na ℓ. Zato je funkcija f strogo padajuća na $\langle -\infty, t_0\rangle$, strogo rastuća na $\langle t_0, +\infty\rangle$ i poprima simetrične vrijednosti oko te točke: $f(t_0 + t) = f(t_0 - t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Iz stroge monotonosti slijedi sljedeći rezultat.

Korolar 3.4. *Hipotenuza pravokutnog trokuta je veća od kateta.*

Dokaz. U trokutu ΔABC s pravim kutom pri vrhu C, pravac BC je okomica na CA kroz točku B, a C je nožište okomice. Zato za svaku točku $T \neq C$ na pravcu CA vrijedi $|BC| < |BT|$. Za $T = A$ dobivamo $a < c$, a analogno slijedi $b < c$. □

Važna posljedica teorema 3.1 i 3.3 je postojanje pravca kroz danu točku koji ne siječe dani pravac. Zato u aksiomu 7E ne moramo postulirati postojanje, nego samo jedinstvenost pravca koji ne siječe ℓ.

Korolar 3.5. *Za svaki pravac ℓ i točku $P \notin \ell$ postoji pravac kroz P koji ne siječe ℓ.*

Dokaz. Neka je N nožište okomice iz P na ℓ. Povucimo okomicu m na pravac PN kroz točku P. Pravac PN je transverzala od ℓ i m koja s njima zatvara prave kutove. Nasuprotni unutarnji kutovi su sukladni, pa se po teoremu 3.1 pravci ℓ i m ne sijeku. □

Uz pomoć teorema 3.3 možemo karakterizirati dostizanje nejednakosti u propoziciji 2.2.

Propozicija 3.6. *Za tri točke A, B, C jednakost $|AC| = |AB| + |BC|$ vrijedi ako i samo ako je B između A i C. Jednakost $|AC| = \big||AB| - |BC|\big|$ vrijedi ako i samo ako su te tri točke kolinearne, ali B nije između A i C.*

Dokaz. Ako je B između A i C, onda postoji pravac ℓ s koordinatizacijom $x : \ell \to \mathbb{R}$ takvom da je $x(A) = a$, $x(B) = b$, $x(C) = c$ i $a \leq b \leq c$. Tada je $|AC| = c - a$, $|AB| = b - a$ i $|BC| = c - b$, pa jednakost $|AC| = |AB| + |BC|$ vrijedi. Obratno, pretpostavimo da vrijedi jednakost $|AC| = |AB| + |BC|$ i koordinatiziramo pravac AC tako da je $x(A) = a$, $x(C) = c$ i $a < c$. Pretpostavimo da B nije na pravcu AC i po teoremu 3.3 spustimo okomicu iz B na AC s nožištem N koje ima koordinatu $x(N) = n$. Ako je $a < n < c$, po već dokazanom smjeru vrijedi $|AC| = |AN| + |NC|$. Trokuti ΔANB i ΔBNC su pravokutni, pa po korolaru 3.4 vrijedi $|AB| > |AN|$ i $|BC| > |NC|$. Tada je $|AC| < |AB| + |BC|$, dakle ne vrijedi jednakost. Ako je $n = a$, kontradikciju dobivamo direktno iz korolara 3.4: $|AC| < |BC| < |AB| + |BC|$. Slučaj $n = c$ je analogan, a u slučaju $n < a$ ili $n > c$ slijedi $|AC| < |NC| <$ (korolar 3.4) $< |BC| < |AB| + |BC|$, odnosno $|AC| < |AN| <$ (korolar 3.4) $< |AB| < |AB| + |BC|$. Dakle, točka B mora ležati na pravcu AC pa i ona ima koordinatu $x(B) = b$. Sad iz $|AC| = c - a$, $|AB| = |b - a|$, $|BC| = |c - b|$ i jednakosti $|AC| = |AB| + |BC|$ dobivamo kontradikciju ako je $b < a$ ili $b > c$. Dakle, točka B je između točaka A i C. Na sličan način dokazujemo karakterizaciju dostizanja lijeve nejednakosti iz propozicije 2.2. □

Udaljenost točke P od pravca ℓ definiramo kao minimalnu udaljenost $|PT|$ za $T \in \ell$ i označavamo $d(P, \ell)$. Vidjeli smo da se minimum poprima kad je T nožište okomice iz P na ℓ.

Propozicija 3.7. *Funkcija $P \mapsto d(P, \ell)$ koja točki pridružuje njezinu udaljenost od pravca ℓ je neprekidna.*

Dokaz. Neprekidnost u točki A po definiciji znači

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \ \ |TA| < \delta \Rightarrow |d(T, \ell) - d(A, \ell)| < \varepsilon.$$

Pokažimo da možemo uzeti $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Po nejednakosti trokuta, za svaku točku $P \in \ell$ vrijedi

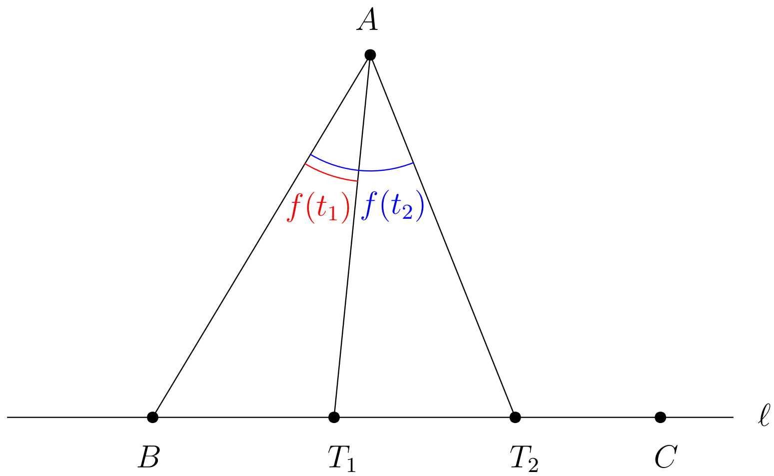
$$d(T, \ell) \leq |TP| \leq |TA| + |AP| < \delta + |AP| = |AP| + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$d(A, \ell) \leq |AP| \leq |AT| + |TP| < \delta + |TP| = |TP| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Budući da je točka $P \in \ell$ proizvoljna, slijedi $d(T, \ell) \leq d(A, \ell) + \frac{\varepsilon}{2}$ i $d(A, \ell) \leq d(T, \ell) + \frac{\varepsilon}{2}$, odnosno $|d(T, \ell) - d(A, \ell)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Time je neprekidnost dokazana. □

Sljedeću tehničku lemu koristit ćemo u dokazu teorema o prečki.

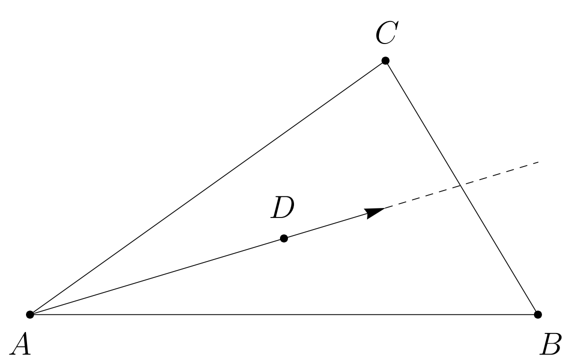
Lema 3.8. *Neka je ℓ pravac s koordinatizacijom $x : \ell \to \mathbb{R}$, $B, C \in \ell$ dvije točke na tom pravcu s koordinatama $x(B) = b$, $x(C) = c$, $b < c$ te $A \notin \ell$ točka izvan tog pravca. Za $t \in \langle b, c\rangle$ neka je $T \in \ell$ točka s koordinatom $x(T) = t$, a $f(t)$ mjera kuta $\angle BAT$. Tada je funkcija $f : \langle b, c\rangle \to \langle 0, \pi\rangle$ neprekidna i strogo rastuća.*



Slika 3.5: Dokaz leme 3.8.

Dokaz. Neprekidnost smo postulirali u aksiomu 5 (e). Neka su $t_1, t_2 \in \langle b, c\rangle$, $t_1 < t_2$ i $T_1 = x^{-1}(t_1)$, $T_2 = x^{-1}(t_2)$ odgovarajuće točke na pravcu ℓ. Dužina $\overline{T_1T_2}$ ne siječe pravac AB, pa su točke T_1 i T_2 s iste strane tog pravca. Slično, $\overline{BT_1}$ ne siječe AT_2, pa su B i T_1 s iste strane pravca AT_2. Stoga je polupravac $\overrightarrow{AT_1}$ u unutrašnjosti kuta $\angle BAT_2$ i možemo primijeniti aksiom 5 (c): $\measuredangle BAT_2 = \measuredangle BAT_1 + \measuredangle T_1AT_2 > \measuredangle BAT_1$, tj. $f(t_1) < f(t_2)$. Vidimo da je f strogo rastuća. $\square$

Teorem 3.9 (Teorem o prečki)**.** *Neka je ΔABC trokut i D točka u njegovoj unutrašnjosti. Onda polupravac $\overrightarrow{AD}$ siječe stranicu $\overline{BC}$.*

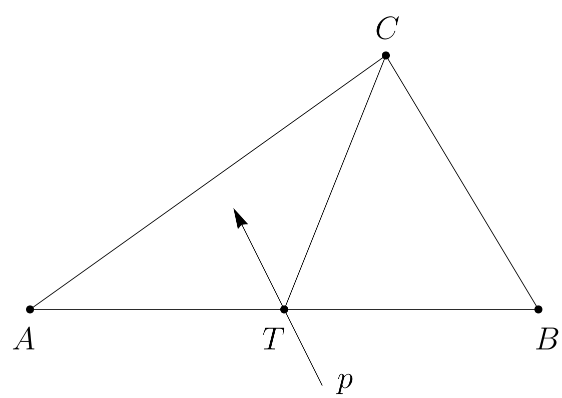


Slika 3.6: Teorem o prečki.

Dokaz. Koordinatiziramo pravac BC i definiramo funkciju f kao u lemi 3.8. Budući da je $f : \langle b, c\rangle \to \langle 0, \pi\rangle$ neprekidna i strogo rastuća, slika joj je otvoreni interval $\langle 0, \alpha\rangle$ za $\alpha = \measuredangle BAC$. Po aksiomu 5 (c) je $\delta = \measuredangle BAD < \alpha$, pa postoji $t \in \langle b, c\rangle$ takav da je $f(t) = \delta$. Točka $T = x(t)$ pripada stranici $\overline{BC}$, a zbog bijektivnosti u aksiomu 5 (d) i $\measuredangle BAD = \measuredangle BAT = \delta$ slijedi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AT}$. Zato polupravac $\overrightarrow{AD}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki T. □

Euklid je koristio tvrdnju teorema o prečki bez dokazivanja, kao očitu. Još jedna slična tvrdnja je takozvani Paschov aksiom. Moritz Pasch (1843.-1930.) bio je njemački matematičar židovskog porijekla koji se bavio osnovama geometrije. U knjizi [16] upozorio je na prešutne pretpostavke u Euklidovim dokazima koje ne slijede iz aksioma. Paschov rad utjecao je na Hilberta i njegovu aksiomatiku.

Teorem 3.10 (Paschov aksiom)**.** *Ako pravac p ne prolazi kroz vrhove trokuta ΔABC i siječe jednu njegovu stranicu, onda p siječe točno jednu od preostale dvije stranice tog trokuta.*

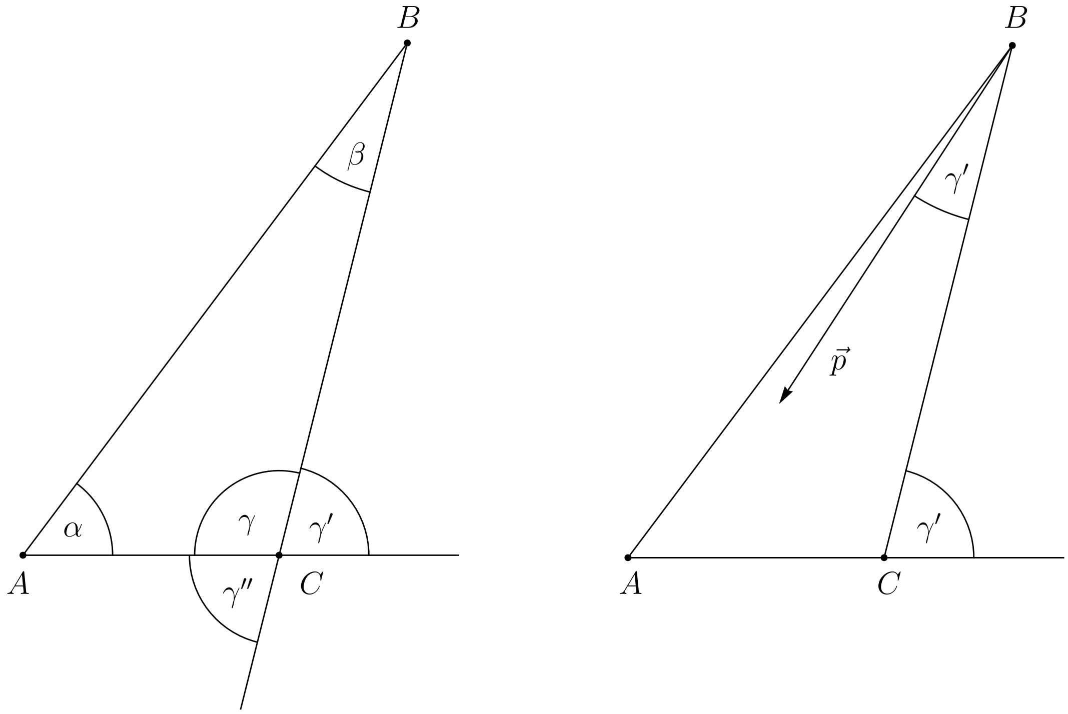


Slika 3.7: Paschov aksiom.

Dokaz. Neka p siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki T i neka je $\vec{p}$ polupravac s vrhom T koji "ulazi" u trokut ΔABC. Budući da p ne prolazi kroz vrhove trokuta, vrijedi $\vec{p} \neq \overrightarrow{TC}$. Zbog bijektivnosti u aksiomu 5 (d) mjera kuta $\angle(\overrightarrow{TA}, \vec{p})$ je ili manja ili veća od $\measuredangle ATC$. U prvom slučaju $\vec{p}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle ATC$, pa po teoremu 3.9 o prečki p siječe stranicu $\overline{AC}$. U drugom slučaju $\vec{p}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle CTB$ i na isti način vidimo da p siječe stranicu $\overline{BC}$. □

3.2 Teoremi o kutovima trokuta

Trokut ΔABC definirali smo kao skup od triju nekolinearnih točaka $\{A, B, C\}$. Kutove $\angle BAC$, $\angle ABC$ i $\angle ACB$ nazivamo *unutarnjim kutovima* trokuta, a njihove sukute *vanjskim kutovima*. Na primjer, na slici 3.8 lijevo kutovi označeni γ' i γ'' su vanjski kutovi pri vrhu C, tj. sukuti kuta γ. Kažemo da su to vanjski kutovi *nasuprotni* unutarnjim kutovima α i β.



Slika 3.8: Vanjski kutovi trokuta.

Teorem 3.11 (O vanjskom kutu). *Mjera vanjskog kuta trokuta veća je od mjera nasuprotnih unutarnjih kutova.*

Dokaz. Kad bi vrijedilo $\gamma' = \beta$, pravac BC bio bi transverzala pravaca AB i AC koja ih siječe tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni. Po teoremu 3.1 ta dva pravca se ne bi sijekla, a oba prolaze kroz točku A. Pretpostavimo da vrijedi $\gamma' < \beta$ i nanesimo u unutrašnjosti kuta $\angle ABC$ polupravac $\vec{p}$ s vrhom B takav da je $\measuredangle(\vec{p}, \overrightarrow{BC}) = \gamma'$ (slika 3.8 desno). Tada po teoremu 3.9 o prečki polupravac $\vec{p}$ siječe stranicu $\overline{AC}$, što je opet kontradikcija s teoremom 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima. Dakle, mora vrijediti $\gamma' > \beta$, a slično dokazujemo $\gamma' > \alpha$. □

Korolar 3.12. *Zbroj mjera bilo koja dva kuta trokuta manji je od π.*

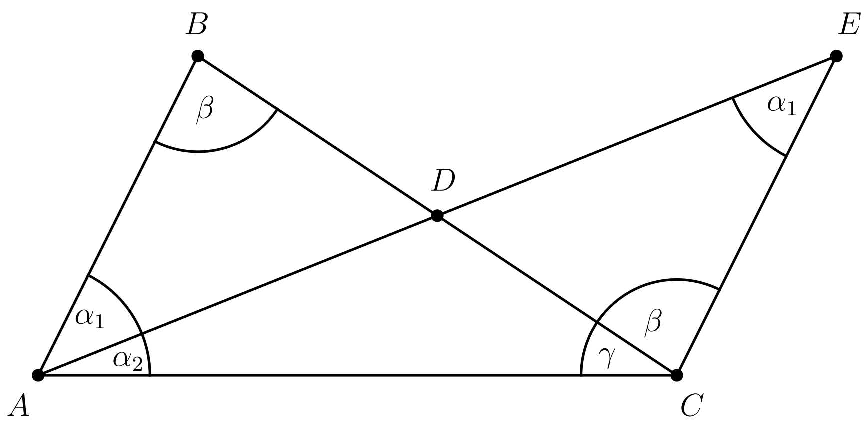
Dokaz. Po teoremu 3.11 je $\alpha < \gamma'$, iz čega slijedi $\alpha + \gamma < \gamma' + \gamma = \pi$. Slično, iz $\beta < \gamma'$ slijedi $\beta + \gamma < \gamma' + \gamma = \pi$. Primjenom teorema 3.11 na vanjski kut pri vrhu A ili B dobivamo $\alpha + \beta < \pi$. □

U euklidskoj ravnini znamo da je zbroj mjera sva tri kuta trokuta jednak π. U modelu H^2 vidjeli smo da postoje trokuti sa zbrojem mjera kutova manjim od π. Bez pozivanja na aksiom o paralelama možemo dokazati da je taj zbroj manji ili jednak π, što je tvrdnja poznata kao Saccheri-Legendreov teorem.

Teorem 3.13 (Saccheri-Legendre). *Zbroj mjera sva tri kuta trokuta manji je ili jednak π.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da je $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$, a E točka na pravcu AD takva da je D polovište dužine $\overline{AE}$.

Postojanje polovišta D i točke E slijedi iz aksioma 3. Označimo mjere kutova $\measuredangle BAD = \alpha_1$ i $\measuredangle DAC = \alpha_2$. Po aksiomu 6 vrijedi sukladnost trokuta $\Delta ADB \cong \Delta EDC$, pa je $\measuredangle DCE = \measuredangle DBA = \beta$ i $\measuredangle DEC = \measuredangle DAB = \alpha_1$ (slika 3.9). Trokuti ΔABC i ΔAEC imaju isti zbroj mjera kutova $\alpha+\beta+\gamma = \alpha_1+\alpha_2+\beta+\gamma$. Zbog $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha$ vrijedi $\alpha_1 \leq \alpha/2$ ili $\alpha_2 \leq \alpha/2$. Dakle, novi trokut ΔAEC ima mjeru jednog kuta manju ili jednaku od $\alpha/2$. Ponavljanjem postupka dobivamo niz trokuta koji imaju isti zbroj mjera triju kutova, a jedan kut im je manji ili jednak od $\alpha/2$, $\alpha/4$, $\alpha/8 \ldots$. Nakon konačno mnogo koraka bit će $\alpha/2^n < \varepsilon$, pa će zbroj mjera preostala dva kuta biti veći od π (jer je zbroj mjera sva tri kuta $\pi + \varepsilon$). To je kontradikcija s korolarom 3.12. □



Slika 3.9: Dokaz teorema 3.13.

3.3 Teoremi o sukladnosti

Neka trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju duljine stranica a, b, c, odnosno a', b', c' te mjere kutova α, β, γ, odnosno α', β', γ'. Sukladnost $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ znači da vrijedi $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$. Po aksiomu 6 dovoljno je znati $a = a'$, $\beta = \beta'$ i $c = c'$, pa moraju vrijediti i ostale jednakosti. Moguće je oslabiti taj aksiom:

Aksiom 6′. *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $\beta = \beta'$ i $c = c'$, onda vrijedi $\alpha = \alpha'$.*

Iz ovog askioma možemo dokazati kriterij sukladnosti SKS, tj. jaču verziju aksioma 6.

Teorem 3.14 (SKS)**.** *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $\beta = \beta'$ i $c = c'$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Iz aksioma $6'$ slijedi $\alpha = \alpha'$. Trebamo dokazati jednakosti $\gamma = \gamma'$ i $b = b'$. Prvu jednakost dobijemo primijenom aksioma $6'$ na trokute ΔCBA i $\Delta C'B'A'$ (iste trokute s drugim redoslijedom vrhova). Za drugu jednakost "nanesemo" duljinu b' na polupravac $\overrightarrow{AC}$: neka je C'' točka na $\overrightarrow{AC}$ takva da je $|AC''| = b'$. Takva točka postoji i jedinstvena je po aksiomu 3. Po aksiomu $6'$ primijenjenom na trokute $\Delta C''AB$ i $\Delta C'A'B'$ ($a = a'$,

$\alpha = \alpha'$, $|C''A| = |C'A'| = b'$) slijedi $\measuredangle BAC'' = \measuredangle B'A'C' = \beta'$. Znamo da je $\beta = \beta'$, pa vrijedi $\measuredangle ABC'' = \measuredangle ABC$. Po aksiomu 5 (d) krakovi $\overrightarrow{BC''}$ i $\overrightarrow{BC}$ se podudaraju, pa su točke C i C'' obje jedinstveno sjecište pravaca $AC = AC''$ i $BC = BC''$ (koristimo jedinstvenost iz aksioma 1). Dakle, vrijedi $C = C''$, iz čega slijedi $b = |AC| = |AC''| = b'$. $\square$

Euklid dokazuje kriterij sukladnosti SKS u četvrtoj propoziciji prve knjige *Elemenata*. Drugi dio dokaza teorema 3.14 sličan je Euklidovu dokazu, ali on ne spominje eksplicitno aksiom $6'$. Sličan je i dokaz kriterija KSK.

Teorem 3.15 (KSK). *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $\alpha = \alpha'$, $c = c'$ i $\beta = \beta'$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Neka je C'' točka na polupravcu $\overrightarrow{AC}$ takva da je $|AC''| = b'$. Po teoremu 3.14 (aksiomu 6), vrijedi $\Delta BAC'' \cong \Delta B'A'C'$. Posebno, vrijedi $\measuredangle ABC'' = \measuredangle A'B'C' = \beta' = \beta = \measuredangle ABC$. Po aksiomu 5 (d) krakovi $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BC''}$ se podudaraju pa slijedi $C = C''$. Dakle, $\Delta ABC = \Delta ABC'' \cong A'B'C'$. $\square$

Idući kriterij sukladnosti je SKK (dva kuta i stranica nasuprot jednog). U euklidskoj geometriji taj kriterij slijedi direktno iz prethodnog jer je zbroj mjera kutova u trokutu jednak π. Ako su bilo koja dva para odgovarajućih kutova sukladna, npr. $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$, onda je i treći par sukladan: $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi - \alpha' - \beta' = \gamma'$. U neutralnoj geometriji ovaj dokaz ne vrijedi, ali kriterij sukladnosti SKK ipak možemo dokazati na drugi način.

Teorem 3.16 (SKK). *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Neka je A'' točka na polupravcu $\overrightarrow{AC}$ takva da je $|BA''| = c'$. Po teoremu 3.14 (aksiomu 6) tada vrijedi $\Delta CBA'' \cong \Delta C'B'A'$, iz čega slijedi $\measuredangle CA''B = \measuredangle C'A'B' = \alpha' = \alpha$. Ako je točka A'' između A i B, trokut $\Delta AA''C$ ima vanjski kut $\measuredangle CA''B = \alpha$ nasuprot unutarnjem kutu $\measuredangle CAA'' = \alpha$, što je kontradikcija s teoremom 3.11. Slično, ako je točka A između A'' i C, kut $\measuredangle CAB = \alpha$ je vanjski kut nasuprot unutarnjem kutu $\measuredangle CA''A = \measuredangle CA''B = \alpha$, što je opet kontradikcija s teoremom 3.11. Zaključujemo da mora biti $A'' = A$, iz čega slijedi $\Delta ABC = \Delta A''BC \cong \Delta A'B'C'$. $\square$

Sjetimo se propozicije 3.2: ako su dvije stranice trokuta ΔABC sukladne, onda su i njima nasuprotni kutovi sukladni. Za dokaz kriterija sukladnosti SSS treba nam obrat te tvrdnje. Dokažimo prvo pomoćnu tvrdnju: nasuprot veće stranice trokuta ΔABC leži veći kut.

Lema 3.17. *Ako u trokutu ΔABC vrijedi $a < b$, onda vrijedi $\alpha < \beta$.*

Dokaz. Neka je P točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|PC| = a$. Tada je trokut ΔCBP jednakokračan, pa po propoziciji 3.2 vrijedi $\measuredangle CBP = \measuredangle CPB =: \varphi$. Po teoremu 3.11 u trokutu ΔAPB vrijedi $\alpha < \varphi$, a po lemi 3.8 vrijedi $\varphi = \measuredangle CBP < \measuredangle CBA = \beta$. Slijedi $\alpha < \beta$. $\square$

Teorem 3.18. *U trokutu ΔABC vrijedi $a = b$ ako i samo ako vrijedi $\alpha = \beta$.*

Dokaz. Implikaciju $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$ dokazali smo u propoziciji 3.2. Za obratnu implikaciju pretpostavimo da je $\alpha = \beta$. Ako je $a < b$, po lemi 3.17 slijedi $\alpha < \beta$, kontradikcija s pretpostavkom. Na isti način vidimo da ne vrijedi $a > b$, pa preostaje samo $a = b$. □

Na taj način dokazujemo i obrat leme 3.17.

Teorem 3.19. *U trokutu ΔABC vrijedi $a < b$ ako i samo ako vrijedi $\alpha < \beta$.*

Dokaz. Implikacija $a < b \Rightarrow \alpha < \beta$ je tvrdnja leme 3.17, a za obratnu implikaciju pretpostavimo da je $\alpha < \beta$. Ako je $a > b$, po leme 3.17 slijedi $\alpha > \beta$. Ako je $a = b$, po propoziciji 3.2 slijedi $\alpha = \beta$. Preostaje samo mogućnost $a < b$. □

Sljedeći teorem je tvrdnja "nasuprot većeg kuta je veća stranica" za dva trokuta.

Teorem 3.20. *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma < \gamma'$, onda je $c < c'$.*

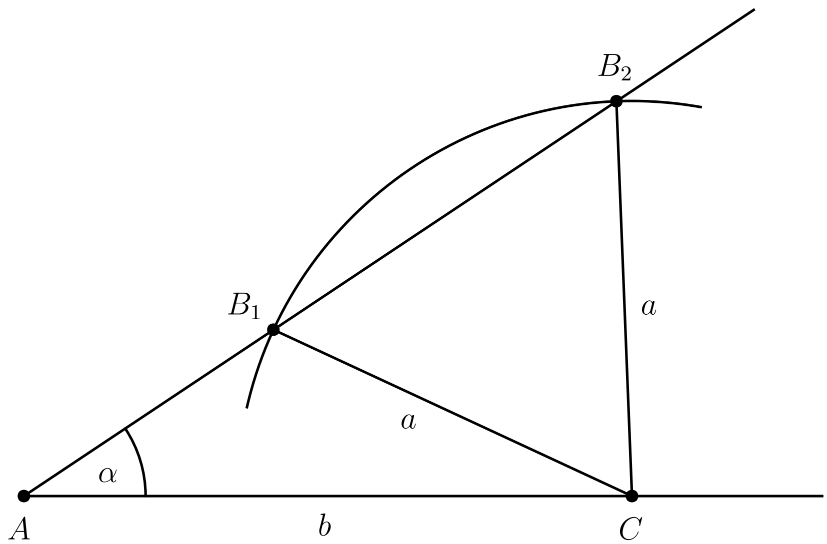
Dokaz. Neka je $\vec{k}$ polupravac s vrhom C' takav da je $\measuredangle(\overrightarrow{C'A'}, \vec{k}) = \gamma$. Zbog $\gamma < \gamma'$ taj polupravac leži u unutrašnjosti kuta $\angle A'C'B'$, pa po teoremu 3.9 o prečki siječe stranicu $\overline{A'B'}$ u nekoj točki T. Neka je B'' točka na polupravcu $\vec{k}$ takva da je $|C'B''| = a$. Tada po kriteriju SKS slijedi $\Delta ACB \cong \Delta A'C'B''$ i $|A'B''| = c$. Imamo tri slučaja: ili je $B'' = T$, ili je T između C' i B'', ili je B'' između C' i T. U prvom slučaju je $B'' = T$ između A' i B', pa je $c = |A'B''| < |A'B'| = c'$. U drugom slučaju prvo dokazujemo nejednakost kutova $\measuredangle B'B''A' >$ (lema 3.8) $> \measuredangle B'B''T = \measuredangle B'B''C' =$ (propozicija 3.2) $= \measuredangle B''B'C' >$ (lema 3.8) $> \measuredangle B''B'T = \measuredangle B''B'A'$. Sada primijenimo teorem 3.19 na trokut $\Delta B'B''A'$: budući da je kut pri vrhu B' manji od kuta pri vrhu B'', u istom su odnosu nasuprotne stranice $c = |A'B''| < |A'B'| = c'$. U trećem slučaju B'' je između C' i T, pa po teoremu 3.9 o prečki polupravac $\overrightarrow{A'B''}$ siječe $\overline{C'B'}$ u nekoj točki P. Vrijedi $\measuredangle B'B''A' >$ (teorem 3.11) $> \measuredangle PB'B'' = \measuredangle C'B'B'' =$ (propozicija 3.2) $= \measuredangle C'B''B' >$ (lema 3.8) $> \measuredangle PB''B' >$ (teorem 3.11) $> \measuredangle B''B'A'$. Ponovo primijenimo teorem 3.19 na trokut $\Delta B'B''A'$: kut pri vrhu B' je manji od kuta pri vrhu B'', pa je i nasuprotna stranica $c = |A'B''| < |A'B'| = c'$. U sva tri slučaja dobili smo $c < c'$ i tvrdnja teorema vrijedi. □

Prema kriteriju sukladnosti SKS (aksiomu 6 ili teoremu 3.14), ako su zadane duljine dviju stranica trokuta a, b i mjera kuta među njima γ, time je jednoznačno određena duljina treće stranice c. Tako dolazimo do funkcije $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}^+$ koja trojki (a, b, γ) pridružuje $c = \Phi(a, b, \gamma)$. Po teoremu 3.20, ta funkcija je rastuća u trećoj varijabli: $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow \Phi(a, b, \gamma_1) < \Phi(a, b, \gamma_2)$. Iz toga lako dokazujemo kriterij sukladnosti SSS.

Teorem 3.21 (SSS)**.** *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Ako je $\gamma < \gamma'$, po prethodnom teoremu dobivamo $c = \Phi(a, b, \gamma) < \Phi(a, b, \gamma') = c'$ suprotno pretpostavci. Na isti način vidimo da ne može biti $\gamma > \gamma'$. Dakle, vrijedi $\gamma = \gamma'$ i trokuti su sukladni po kriteriju SKS. □

U euklidskoj geometriji kriterij sukladnosti SSK (dvije stranice i kut nasuprot jedne) ne vrijedi bez dodatne pretpostavke. Neka su zadane duljine stranica a, b i mjera kuta α. Konstruiramo kut s vrhom A mjere α i na jednom kraku označimo točku C takvu da je $|AC| = b$. Zatim povučemo kružnicu polumjera a sa središtem C i gledamo sjecište s drugim krakom kuta. Ako je polumjer a veći od udaljenosti točke C od drugog kraka i vrijedi $a < b$, dobivamo dva sjecišta B_1 i B_2. Trokuti ΔAB_1C i ΔAB_2C imaju zadane elemente a, b, α, ali nisu sukladni (slika 3.10). Protuprimjer za kriterij sukladnosti SSK postoji i u modelu hiperbolične ravnine (zadatak 3.4). Ako je polumjer kružnice $a > b$, opisana konstrukcija daje samo jedno sjecište s drugim krakom. Zaista, vrijedi kriterij sukladnosti "dvije stranice i kut nasuprot veće".



Slika 3.10: Protuprimjer za kriterij sukladnosti SSK.

Teorem 3.22 (SSK$^>$). *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ i pritom je $a > b$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Neka je B'' točka na polupravcu $\overrightarrow{AB}$ takva da je $|AB''| = c'$. Tada po kriteriju SKS vrijedi $\Delta B''AC \cong \Delta B'A'C'$, pa je $|B''C| = |B'C'| = a' = a$. Tvrdimo da je $B'' = B$, iz čega slijedi tražena sukladnost. U suprotnom je trokut $\Delta CB''B$ jednakokračan i vrijedi $\measuredangle CB''B = \measuredangle CBB'' = \beta$. Ako je B'' između A i B, kutovi $\angle AB''C$ i $\angle CB''B$ su sukuti pa vrijedi $\measuredangle AB''C = \pi - \measuredangle CB''B = \pi - \beta$. Primijenimo teorem 3.19 na trokut $\Delta AB''C$, pa iz uvjeta $a > b$ dobivamo $\alpha > \pi - \beta$, tj. $\alpha + \beta > \pi$. To je kontradikcija s korolarom 3.12. U slučaju da je B između A i B'' na sličan način dobivamo kontradikciju. Zato mora vrijediti $B'' = B$ iz čega slijedi $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. $\square$

Od svih mogućih podudaranja tri od šest elemenata dvaju trokuta, ostaje još podudaranje mjera triju kutova (KKK). Znamo da u euklidskoj ravnini iz toga ne slijedi sukladnost, nego sličnost trokuta. Kasnije ćemo dokazati da u hiperboličnoj ravnini vrijedi i kriterij sukladnosti KKK.

3.4 Pravokutnici

Pravokutnik je četverokut s četiri prava kuta. U euklidskoj ravnini pravokutnici postoje i detaljno se obrađuju u školskoj geometriji. Na primjer, uči se formula za površinu pravokutnika $P = a \cdot b$, gdje su a i b duljine susjednih stranica. Dokazat ćemo da u hiperboličnoj ravnini ne postoje pravokutnici. Točnije, dokazat ćemo da ako postoji barem jedan pravokutnik, onda vrijedi euklidski aksiom o paralelama 7E. Aksiom će slijediti kad pokažemo da iz postojanja jednog pravokutnika slijedi postojanje pravokutnika s bilo kojim duljinama susjednih stranica $a, b > 0$. Prvo dokazujemo da su duljine nasuprotnih stranica jednake.

Lema 3.23. *Nasuprotne stranice pravokutnika su sukladne.*

U euklidskoj ravnini lema slijedi iz obrata teorema 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima. Ako je $ABCD$ pravokutnik, pravac BC je zajednička normala pravaca AB i CD na kojima leže nasuprotne stranice. Po teoremu 3.1 ta dva pravca se ne sijeku, a po obratu tog teorema njihova transverzala AC na kojoj leži dijagonala pravokutnika također zatvara s AB i CD sukladne nasuprotne unutarnje kutove. Dakle, $\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ i $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$ pa po kriteriju KSK (teoremu 3.15) dobivamo sukladnost trokuta $\Delta ACB \cong \Delta CAD$. Zato vrijedi $|AB| = |CD|$. Međutim, želimo dokazati lemu kao neutralni teorem, tj. bez pozivanja na aksiom o paralelama i njegove posljedice, pa ne smijemo koristiti obrat teorema 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima.

Dokaz leme 3.23. Neka je $ABCD$ pravokutnik u kojem nasuprotne stranice nisu sukladne. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|AD| < |BC|$. Neka je E točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BE| = |AD|$ i označimo $\varphi = \measuredangle BED$. Po teoremu 3.11 primijenjenom na ΔDEC, vrijedi $\varphi > \measuredangle ECD = \frac{\pi}{2}$. Tvrdimo da su u četverokutu $ABED$ kutovi pri vrhovima E i D sukladni. Naime, po kriteriju SKS vrijedi $\Delta BAD \cong \Delta ABE$, iz čega slijedi $|BD| = |AE|$ i $\measuredangle ABD = \measuredangle BAE =: \alpha$. Budući da su kutovi pri vrhovima A i B pravi, vrijedi $\measuredangle DBE = \measuredangle EAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Sad opet po kriteriju SKS vrijedi $\Delta DAE \cong \Delta EBD$, čime smo dokazali $\measuredangle ADE = \measuredangle BED = \varphi$. Zbroj kutova u četverokutu $ABED$ iznosi $\pi + 2\varphi$, što po Saccheri-Legendreovu teoremu 3.13 može biti najviše 2π. Time smo dobili $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, što je kontradikcija s ranije dokazanim $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Dakle, mora vrijediti $|AD| = |BC|$, a analogno se pokazuje $|AB| = |CD|$. □

Teorem 3.24. *Ako postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina $a, b > 0$, onda za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina na i b.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ očito vrijedi. Ako postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina a i b, izaberemo točku E na polupravcu $\overrightarrow{AB}$ takvu da je $|BE| = |AB| = a$ i točku F na polupravcu $\overrightarrow{DC}$ takvu da je $|CF| = |DC| = a$. Po kriteriju SKS vrijedi $\Delta DAB = \Delta CBE$, pa je $\measuredangle ADB = \measuredangle BCE =: \varphi$, $\measuredangle ABD = \measuredangle BEC =: \psi$ i $|DB| = |CE|$. Tada je $\measuredangle CDB = \frac{\pi}{2} - \varphi = \measuredangle FCE$, pa po kriteriju SKS vrijedi $\Delta CDB \cong \Delta FCE$. Slijedi $\measuredangle CFE = \measuredangle DCB = \frac{\pi}{2}$, a povlačenjem druge dijagonale analogno vidimo $\measuredangle BEF = \measuredangle ABC = \frac{\pi}{2}$. Dakle, $AEFD$ je pravokutnik sa susjednim stranicama duljine $2a$ i b. Na isti način možemo pravokutnik sa stranicama duljine na i b proširiti do pravokutnika sa stranicama duljine $(n + 1)a$ i b, pa tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Teorem 3.25. *Ako postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina $a, b > 0$, onda za svaki realan broj $x > 0$ postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina x i b.*

Dokaz. Za dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $na > x$. Po prethodnom teoremu postoji pravokutnik $ABCD$ sa susjednim stranicama duljine na i b. Izaberemo točku E na $\overline{AB}$ takvu da je $|AE| = x$ i točku F na $\overline{DC}$ takvu da je $|DF| = x$. Označimo $\measuredangle AEF = \varepsilon_1$, $\measuredangle FEB = \varepsilon_2$, $\measuredangle DFE = \varphi_1$ i $\measuredangle EFC = \varphi_2$. To su sukuti, pa vrijedi $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. S druge strane, kao posljedica Saccheri-Legendreova teorema 3.13, zbroj mjera kutova četverokuta je manji ili jednak 2π. Primjenom na četverokut $AEFD$ slijedi $\varepsilon_1 + \varphi_1 \leq \pi$, a na četverokut $EBCF$ slijedi $\varepsilon_2 + \varphi_2 \leq \pi$. Slično kao u prethodnom dokazu, povlačenjem dijagonala $\overline{AF}$ i $\overline{DE}$ možemo dokazati $\varepsilon_1 = \varphi_1$ i $\varepsilon_2 = \varphi_2$. Sad iz nejednakosti $\varepsilon_1 + \varphi_1 \leq \pi$ i $\varepsilon_2 + \varphi_2 \leq \pi$ slijedi $\varepsilon_1 \leq \frac{\pi}{2}$ i $\varepsilon_2 \leq \frac{\pi}{2}$, što je zbog $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \pi$ moguće jedino ako je $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} = \varphi_1$. Dakle, $AEFD$ je pravokutnik sa susjednim stranicama duljina x i b. □

Korolar 3.26. *Ako postoji pravokutnik, onda za sve realne brojeve $x, y > 0$ postoje pravokutnici sa susjednim stranicama duljina x i y.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina a i b. Po prethodnom teoremu postoji pravokutnik sa susjednim stranicama duljina x i b. Ponovo ga primijenimo na taj pravokutnik, pa dobijemo pravokutnik sa susjednim stranicama duljina x i y. □

Teorem 3.27. *Ako postoji pravokutnik, onda je zbroj mjera triju kutova svakog trokuta jednak π.*

Dokaz. Neka je ΔABC trokut. Ako je pravokutan, recimo s pravim kutom pri vrhu C, katetama a, b i nasuprotnim kutovima α, β, po korolaru 3.26 postoji pravokutnik $DEFG$ sa susjednim stranicama $|DE| = a$ i $|EF| = b$. Tada po kriteriju SKS vrijedi $\Delta ACB \cong \Delta DEF \cong \Delta FGD$, pa je $\measuredangle GDF = \alpha$ i $\measuredangle EDF = \beta$. Kut pravokutnika pri vrhu D je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, iz čega slijedi $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Ako ΔABC nije pravokutan, neka mu je najveći kut pri vrhu C. Spustimo okomicu iz vrha C na nasuprotnu stranicu s nožištem N. Time smo podijelili trokut na dva pravokutna trokuta ΔACN i ΔBCN koji po prethodnom slučaju imaju zbrojeve kutova $\alpha + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$. Zbroj kutova polaznog trokuta je $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi$. □

Teorem 3.28. *Ako je zbroj mjera triju kutova svakog trokuta jednak π, onda vrijedi aksiom 7E.*

Dokaz. Za pravac ℓ i točku $T \notin \ell$ spustimo okomicu iz T na ℓ s nožištem N. Znamo da okomica na TN kroz T ne siječe ℓ (korolar 3.5). Bilo koji drugi pravac p kroz T s jedne strane transverzale TN zatvara unutarnji kut mjere $\alpha < \frac{\pi}{2}$. S te strane izaberemo točku $P_1 \in \ell$ takvu da je $|NP_1| = |TN|$. Onda je ΔTNP_1 jednakokračan pravokutni trokut, koji po pretpostavci teorema ima kut $\measuredangle NP_1T = \frac{\pi}{4}$. Zatim izaberemo točku P_2 na polupravcu $\overrightarrow{NP_1}$ takvu da P_1 bude između N i P_2 i da vrijedi $|P_1P_2| = |TP_1|$. Trokut ΔTP_1P_2 je jednakokračan s kutom $\measuredangle TP_1P_2 = \frac{3\pi}{2}$, pa je po pretpostavci teorema $\measuredangle NP_2T = \measuredangle P_1P_2T = \frac{\pi}{8}$. Nastavljajući analogno dalje dobivamo točku P_n na $\overrightarrow{NP_1}$ takvu da je $\measuredangle NP_nT = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ i stoga $\measuredangle NTP_n = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Taj izraz teži prema $\frac{\pi}{2}$ kada $n \to \infty$, pa zbog $\alpha < \frac{\pi}{2}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\measuredangle NTP_n > \alpha$. To znači da polupravac $\vec{p}$ s vrhom T leži u unutrašnjosti kuta $\angle NTP_n$, pa po teoremu 3.9 o prečki siječe $NP_n = \ell$. Dakle, od svih pravaca kroz T, samo okomica na TN ne siječe pravac ℓ. $\square$

Ako postoji pravokutnik, prethodna dva teorema daju dokaz euklidskog aksioma o paralelama 7E. Zato su geometričari koji su se bavili problemom paralela nastojali konstruirati pravokutnik. Iz aksioma 1–6 možemo konstruirati četverokut koji ima tri prava kuta: uzmemo pravi kut $\angle(\vec{p},\vec{q})$ s vrhom B i izaberemo bilo koju točku D u njegovoj unutrašnjosti. Neka je A nožište okomice iz D na krak $\vec{p}$, a C nožište okomice iz D na krak $\vec{q}$ (koristimo se teoremom 3.3). Tada je $ABCD$ četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B i C. U euklidskoj ravnini zbroj mjera kutova četverokuta je 2π, pa je i četvrti kut pravi, ali to ne možemo zaključiti bez pozivanja na aksiom 7E. Četverokut s tri prava kuta zovemo *Lambertovim četverokutom.*

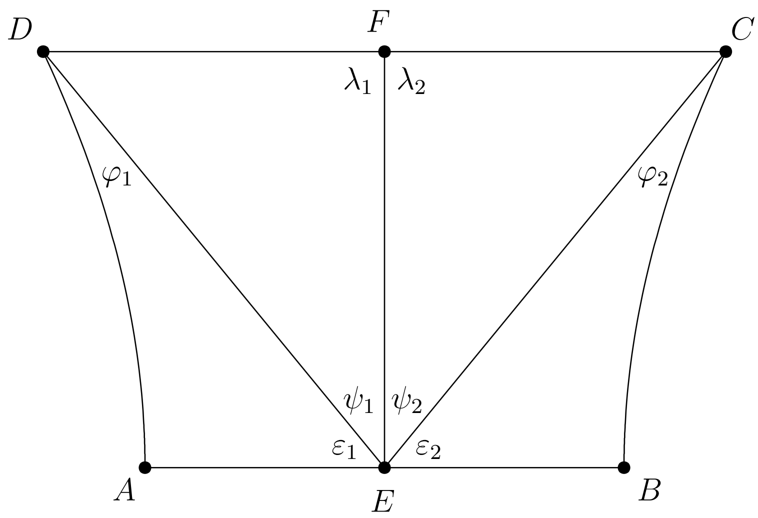
Teorem 3.29. *U Lambertovom četverokutu mjera četvrtog kuta manja je ili jednaka $\frac{\pi}{2}$, a duljine stranica uz taj kut nisu manje od duljina njima nasuprotnih stranica.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B, C. Po Saccheri-Legendreovu teoremu 3.13, zbroj mjera sva četiri kuta manji je ili jednak 2π, pa je mjera četvrtog kuta $\delta \leq \frac{\pi}{2}$. Trebamo još dokazati $|AB| \leq |CD|$ i $|BC| \leq |AD|$. Neka je E polovište stranice $\overline{BC}$ i p simetrala te stranice, tj. okomica na BC kroz E. Po teoremu 3.9 o prečki primijenjenom na ΔAED, pravac p siječe nasuprotnu stranicu $\overline{AD}$ u nekoj točki F. Neka je A' točka na polupravcu $\overrightarrow{CD}$ takva da je $|CA'| = |BA|$. Po SKS kriteriju vrijedi $\Delta BEF \cong \Delta CEF$, pa je $|BF| = |CF|$ i $\measuredangle EBF = \measuredangle ECF$. No tada po SKS kriteriju vrijedi i sukladnost $\Delta FBA \cong \Delta FCA'$, jer je $\measuredangle FBA = \frac{\pi}{2} - \measuredangle EBF = \frac{\pi}{2} - \measuredangle ECF = \measuredangle FCA'$, pa slijedi $\measuredangle FA'C = \measuredangle FAB = \frac{\pi}{2}$. Sada zaključujemo da točka D ne može biti između C i A' jer bi u trokutu $\Delta FA'D$ zbroj mjera kutova pri vrhovima A' i D bio $\frac{\pi}{2} + (\pi - \delta) \geq \pi$, što je kontradikcija s korolarom 3.12. Dakle, ili je $D = A'$, ili je A' između C i D, pa je $|AB| = |CA'| \leq |CD|$. Na sličan način dokazujemo $|BC| \leq |AD|$. $\square$

Ako postoji pravokutnik, po lemi 3.23 znamo da su nasuprotne stranice sukladne. Druga ideja za konstruirati pravokutnik je uzeti dužinu $\overline{AB}$ i povući okomice p i q na pravac AB kroz točke A i B. Zatim izaberemo točke $D \in p$ i $C \in q$ s iste strane pravca AB takve da vrijedi $|AD| = |BC|$. Tako dobivamo četverokut $ABCD$ s dva prava kuta u vrhovima A, B i sukladnim nasuprotnim stranicama $\overline{AD}$, $\overline{BC}$. Četverokut s tim svojstvima zovemo *Saccherijevim četverokutom.* Stranicu $\overline{AB}$ zovemo *donjom osnovicom*, stranice $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ *krakovima*, a četvrtu stranicu $\overline{CD}$ *gornjom osnovicom* Saccherijeva četverokuta.

Propozicija 3.30. *U Saccherijevu četverokutu kutovi uz gornju osnovicu su sukladni i mjera im je manja ili jednaka $\frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s pravim kutom u vrhovima A i B. Po kriteriju SKS vrijedi $\Delta DAB \cong \Delta CBA$, pa je $|DB| = |CA|$. Sad po kriteriju SSS (teoremu 3.21) vrijedi $\Delta BCD \cong \Delta ADC$, pa je $\measuredangle ADC = \measuredangle ADC$, tj. $\gamma = \delta$. Iz Saccheri-Legendreova teorema 3.13 slijedi da je ta mjera manja ili jednaka $\frac{\pi}{2}$. $\square$



Slika 3.11: Dokaz propozicije 3.31.

Propozicija 3.31. *Spojnica polovišta gornje i donje osnovice Saccherijeva četverokuta okomita je na osnovice.*

Dokaz. Neka je E polovište donje osnovice $\overline{AB}$, a F polovište gornje osnovice $\overline{CD}$. Označimo mjere kutova kao na slici 3.11. Po kriteriju SKS je $\Delta DAE \cong \Delta CBE$, pa vrijedi $|DE| = |CE|$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\varphi_1 = \varphi_2$. Po kriteriju SSS je $\Delta DEF \cong \Delta CEF$, iz čega slijedi $\psi_1 = \psi_2$ i $\lambda_1 = \lambda_2$. Kutovi kojima su mjere λ_1 i λ_2 su sukuti, pa je $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\pi}{2}$ i spojnica polovišta EF je okomita na gornju osnovicu. Analogno, kutovi $\measuredangle AEF = \varepsilon_1 + \psi_1 = \varepsilon_2 + \psi_2 = \measuredangle BEF$ su sukuti, pa su pravi i EF je okomica na donju osnovicu. □

Korolar 3.32. *Osnovice Saccherijeva četverokuta leže na pravcima koji se ne sijeku.*

Dokaz. Spojnica polovišta gornje i donje osnovice je po prethodnoj propoziciji njihova zajednička normala, pa se pravci na kojima leže osnovice ne sijeku po teoremu 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima. □

Propozicija 3.33. *Duljina donje osnovice Saccherijeva četverokuta manja je ili jednaka duljini gornje osnovice.*

Dokaz. Spojnica polovišta gornje i donje osnovice dijeli Saccherijev četverokut na dva sukladna Lambertova četverokuta $AEFD$ i $BEFC$ (slika 3.11). Po teoremu 3.29 vrijedi $|AE| \leq |DF|$ i $|EB| \leq |FC|$, iz čega slijedi $|AB| \leq |CD|$. □

U euklidskoj ravnini nejednakosti iz teorema 3.29 i propozicija 3.30 i 3.33 se dostižu, a Lambertovi i Saccherijevi četverokuti su pravokutnici. Dostizanje bilo koje nejednakosti ekvivalentno je aksiomu 7E, pa su u hiperboličnoj ravnini sve te nejednaskosti stroge. U sljedećem poglavlju izvodimo druge posljedice hiperboličnog aksioma o paralelama 7H.

Zadaci

Zadatak 3.1. *U modelu H^2 nađite protuprimjer za obrat teorema 3.1. Koristeći se aksiomom 7E dokažite obrat tog teorema.*

Zadatak 3.2. *Proučite dokaz 5. propozicije (naše propozicije 3.2) u* Elementima *[8].*

Zadatak 3.3. *Dokažite da iz aksioma 7E slijedi da je zbroj mjera triju kutova trokuta jednak π.*

Zadatak 3.4. *U modelu hiperbolične ravnine nađite protuprimjer za kriterij sukladnosti SSK. Točnije, nađite četiri točke $A, B_1, B_2, C \in H^2$ takve da A, B_1 i B_2 leže na istom pravcu, C ne leži na tom pravcu, A nije između B_1 i B_2 (tj. $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB_2}$) te vrijedi $|B_1C| = |B_2C|$, ali trokuti ΔAB_1C i ΔAB_2C nisu sukladni.*

Zadatak 3.5. *Definirajte pojam četverokuta i, općenito, n-terokuta (poligona) u ravnini.*

Zadatak 3.6. *Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut s pravim kutovima u vrhovima A, B i C. Dokažite da nasuprotne stranice leže na pravcima koji se ne sijeku. Dokažite da vrijedi $|AB| = |BC|$ ako i samo ako vrijedi $|CD| = |DA|$.*

Zadatak 3.7. *Neka je $ABCD$ Lambertov četverokut u modelu hiperbolične ravnine H^2 s pravim kutovima u vrhovima A, B, C i stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ i $d = |DA|$. Dokažite da tada vrijedi $\operatorname{sh} c = \operatorname{ch} d \cdot \operatorname{sh} a$.*

Zadatak 3.8. *Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i krakovima $\overline{BC}$, $\overline{AD}$. Neka su E i F polovišа osnovica, a G i H polovišta krakova. Dokažite da su pravci EF i GH okomiti.*

Zadatak 3.9. *Dokažite: četverokut kojem su dva susjedna kuta prava, a preostala dva kuta su sukladna je Saccherijev četverokut.*

Zadatak 3.10. Pseudokvadrat *je četverokut kojem su sve četiri stranice sukladne i sva četiri kuta sukladna. Dokažite:*

(a) *Mjera kutova pseudokvadrata je manja ili jednaka $\pi/2$.*

(b) *Spojnica polovišta nasuprotnih stranica je okomita na te stranice.*

(c) *Spojnice polovišta nasuprotnih stranica međusobno su okomite i raspolavljaju se.*

(d) *Dijagonale pseudokvadrata su simetrale njegovih kutova.*

Poglavlje 4

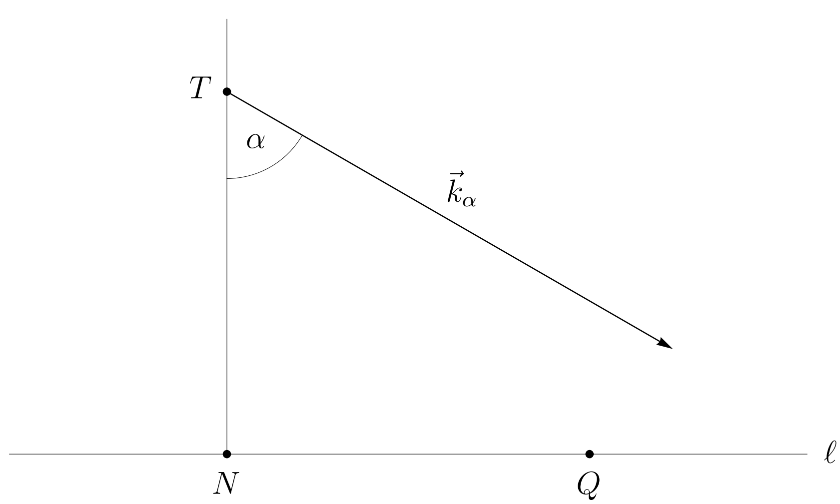
Teoremi hiperbolične geometrije

"In mathematics you don't understand things. You just get used to them."
John von Neumann.

U ovom poglavlju proučavamo posljedice negacije euklidskog aksioma o paralelama, tj. posljedice aksioma 7H. Euklidski aksiom 7E govori o jedinstvenosti paralele **za svaki** neincidentni par točke i pravca (T, ℓ). Negacija te tvrdnje je **postojanje** para (T, ℓ) za koji paralela nije jedinstvena. Dokazat ćemo da to ipak vrijedi **za svaki** neincidentni par (T, ℓ).

4.1 Kut paralelnosti

Neka je ℓ pravac i T točka koja ne leži na ℓ. Označimo s N nožište okomice iz T na ℓ i izaberimo točku Q na ℓ različitu od N (slika 4.1). Izborom točke Q odredili smo jednu od dvije poluravnine pravca TN. Polupravci $\vec{k}$ s vrhom T u toj poluravnini su po aksiomu 5 (d)



Slika 4.1: Definicija presječnog skupa i kuta paralelnosti.

u bijektivnoj korespondenciji s brojevima $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ tako da vrijedi $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{k}) = \alpha$. Polupravac koji odgovara broju α označavamo $\vec{k}_\alpha$. *Presječni skup* od T i ℓ obzirom na poluravninu kojoj pripada Q je skup svih $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ za koje polupravac $\vec{k}_\alpha$ siječe ℓ:

$$\mathcal{P}(T, \ell, Q) = \{\alpha \in \langle 0, \pi\rangle \mid \vec{k}_\alpha \cap \ell \neq \emptyset\}.$$

Propozicija 4.1. *Ako je $\alpha_1 \in \mathcal{P}(T, \ell, Q)$, onda je $\alpha_2 \in \mathcal{P}(T, \ell, Q)$ za svaki $\alpha_2 < \alpha_1$.*

Dokaz. Neka polupravac $\vec{k}_{\alpha_1}$ siječe pravac ℓ u točki P_1. Polupravac $\vec{k}_{\alpha_2}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle NTP_1$, pa po teoremu 3.9 o prečki siječe stranicu $\overline{NP_1}$ trokuta ΔNTP_1. Zato je $\alpha_2 \in \mathcal{P}(T, \ell, Q)$. □

Propozicija 4.2. *Vrijedi $\frac{\pi}{2} \notin \mathcal{P}(T, \ell, Q)$.*

Dokaz. U dokazu korolara 3.5 vidjeli smo da okomica na pravac TN kroz točku T ne siječe pravac ℓ. To je posljedica teorema 3.1 o nasuprotnom unutarnjim kutovima. Polupravac $\vec{k}_{\pi/2}$ leži na toj okomici, pa ne siječe ℓ. □

Iz ove dvije propozicije slijedi da $\alpha \notin \mathcal{P}(T, \ell, Q)$ za sve $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Označimo supremum presječnog skupa s $\alpha_0 = \sup \mathcal{P}(T, \ell, P)$. Za sada znamo da je $\alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Propozicija 4.3. *Vrijedi $\alpha_0 \notin \mathcal{P}(T, \ell, Q)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da $\vec{k}_{\alpha_0}$ siječe ℓ u nekoj točki P_0. Izaberemo točku P na pravcu ℓ tako da P_0 bude između N i P. Zbog aditivnosti mjere kuta (aksioma 5 (c)) je $\alpha = \measuredangle NTP = \measuredangle NTP_0 + \measuredangle P_0TP > \measuredangle NTP_0 = \alpha_0$. Polupravac $\vec{k}_\alpha$ siječe pravac ℓ u točki P, pa je $\alpha \in \mathcal{P}(T, \ell, Q)$. To je kontradikcija s definicijom supremuma α_0. □

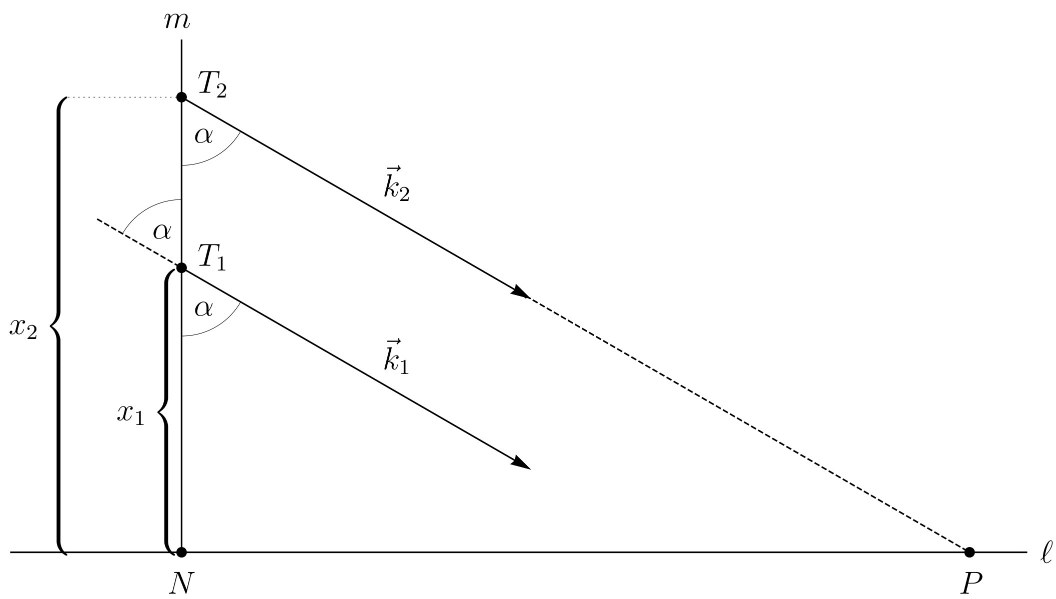
Dakle, presječni skup je otvoreni interval $\mathcal{P}(T, \ell, Q) = \langle 0, \alpha_0\rangle$. Iduća propozicija pokazuje da gornja granica α_0 ovisi samo o udaljenosti točke T od pravca ℓ.

Propozicija 4.4. *Neka je T', ℓ', Q' neki drugi izbor točaka i pravca iz definicije presječnog skupa i N' nožište okomice iz T' na ℓ'. Ako je $|TN| = |T'N'|$, onda je $\mathcal{P}(T, \ell, Q) = \mathcal{P}(T', \ell', Q')$.*

Dokaz. Za po volji izabran $\alpha \in \mathcal{P}(T, \ell, Q)$ neka polupravac $\vec{k}_\alpha$ siječe pravac ℓ u točki P. Neka je P' točka na polupravcu $\overrightarrow{N'Q'}$ takva da je $|N'P'| = |NP|$ (postoji i jedinstvena je prema aksiomu 3). Po kriteriju SKS vrijedi sukladnost $\Delta TNP \cong \Delta T'N'P'$, pa je $\measuredangle N'T'P' = \measuredangle NTP = \alpha$. Polupravac $\overrightarrow{T'P'}$ odgovara kutu α i siječe pravac ℓ' u točki P', pa je $\alpha \in \mathcal{P}(T', \ell', Q')$. Time smo dokazali inkluziju $\mathcal{P}(T, \ell, Q) \subseteq \mathcal{P}(T', \ell', Q')$, a na isti način dokazuje se obratna inkluzija. □

Za svaki realan broj $x > 0$ možemo izabrati pravac ℓ i točku T na udaljenosti x od ℓ, tako da za nožište N okomice iz T na ℓ vrijedi $|TN| = x$. Odgovarajući presječni skup označavamo $\mathcal{P}(x)$, a njegov supremum $\Pi(x) = \sup \mathcal{P}(x)$. To je najmanji kut α za koji polupravac $\vec{k}_\alpha$ ne siječe ℓ i zovemo ga *kutom paralelnosti.* Dobili smo funkciju $\Pi : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, \frac{\pi}{2}]$.

Propozicija 4.5. *Funkcija Π je padajuća, tj. vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow \Pi(x_1) \geq \Pi(x_2)$.*



Slika 4.2: Funkcija Π je padajuća.

Dokaz. Neka je ℓ pravac i m okomica na ℓ koja ga siječe u točki N. Izaberemo na m točke T_1 i T_2 s iste strane pravca ℓ tako da je $|NT_1| = x_1$ i $|NT_2| = x_2$. Neka je $\Pi(x_1) = \alpha$ i nanesimo na točke T_1 i T_2 redom polupravce $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ tako da bude $\measuredangle(\overrightarrow{T_1N}, \vec{k}_1) = \measuredangle(\overrightarrow{T_2N}, \vec{k}_2) = \alpha$ (slika 4.2). Polupravac $\vec{k}_1$ ne siječe pravac ℓ po definiciji kuta paralelnosti α, a ne siječe ni pravac na kojem leži $\vec{k}_2$ po teoremu 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima. Kad bi polupravac $\vec{k}_2$ sijekao ℓ u nekoj točki P, dobili bismo kontradikciju s teoremom 3.10 ("Paschovim aksiomom"). Dakle, $\vec{k}_2$ ne siječe ℓ, pa $\alpha \notin \mathcal{P}(x_2)$ iz čega slijedi $\Pi(x_2) \leq \alpha = \Pi(x_1)$. □

Primijetimo da su do sada dokazane propozicije u ovoj cjelini zapravo neutralni teoremi, tj. nismo se pozivali na aksiom o paralelama. Ako vrijedi euklidski aksiom 7E, jedini pravac kroz točku T koji ne siječe ℓ je okomica na pravac TN. To znači da svi polupravci $\vec{k}_\alpha$ za $\alpha < \frac{\pi}{2}$ sijeku ℓ. Za svaki $x > 0$ presječni skup je $\mathcal{P}(x) = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, a funkcija $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ je konstanta. Ako vrijedi hiperbolični aksiom 7H, funkcija Π poprima vrijednosti manje od $\frac{\pi}{2}$.

Propozicija 4.6. *U hiperboličnoj ravnini postoji $x_0 > 0$ takav da je $\Pi(x_0) < \frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Po aksiomu 7H postoje neincidentna točka T i pravac ℓ takvi da bar dva pravca kroz T ne sijeku ℓ. Bar jedan od ta dva pravca nije okomit na TN, nazovimo ga p (N je kao i ranije nožište okomice iz T na ℓ). Polupravci s vrhom T koji leže na p zatvaraju sukute s krakom $\overrightarrow{TN}$, tj. vrijedi $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{p}) + \measuredangle(\overrightarrow{TN}, -\vec{p}) = \pi$. Budući da p nije okomit na TN, jedan od pribrojnika je strogo manji, a drugi je strogo veći od $\frac{\pi}{2}$. Recimo da je $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{p}) = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Polupravac $\vec{p}$ ne siječe ℓ, pa vrijedi $\alpha \notin \mathcal{P}(x_0)$ gdje je $x_0 = |TN|$. Tada vrijedi $\Pi(x_0) \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. □

Korolar 4.7. *Za sve $x > x_0$ vrijedi $\Pi(x) < \frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Po propoziciji 4.5 vrijedi $\Pi(x) \leq \Pi(x_0) < \frac{\pi}{2}$. □

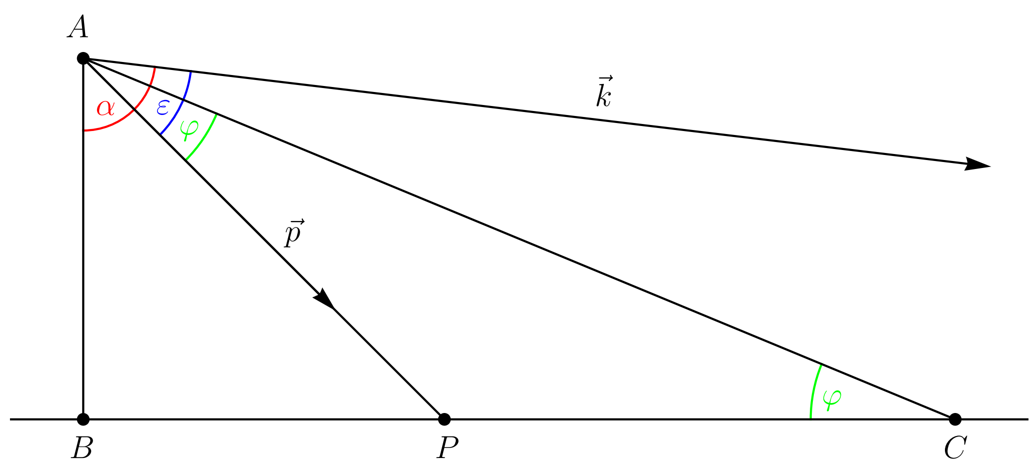
Kasnije ćemo dokazati da i za sve $x < x_0$ vrijedi $\Pi(x) < \frac{\pi}{2}$. Iz toga će slijediti da za **svaki** neincidentni par (T, ℓ) postoji više pravaca kroz T koji ne sijeku ℓ (teorem 4.26). No već iz postojanja udaljenosti x_0 za koju je kut paralelnosti $\Pi(x_0) < \frac{\pi}{2}$ možemo dokazati neke hiperbolične teoreme koji ne vrijede u euklidskoj ravnini i zato su iznenađujući (tj. nismo na njih naviknuti). To ćemo napraviti u idućoj cjelini.

4.2 Osnovni hiperbolični teoremi

Neka je ΔABC trokut s kutovima mjera α, β i γ. *Defekt* tog trokuta definiramo kao $\delta(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. U euklidskoj ravnini vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, pa je $\delta(ABC) = 0$. Po Saccheri-Legendreovu teoremu 3.13 u neutralnoj geometriji vrijedi $\delta(ABC) \geq 0$. Pogledajmo što vrijedi za defekt trokuta u hiperboličnoj ravnini.

Teorem 4.8. *U hiperboličnoj ravnini postoji trokut s pozitivnim defektom.*

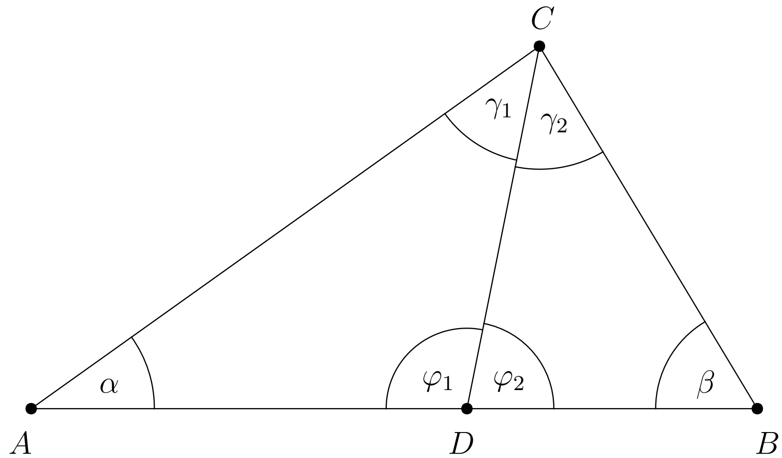
Dokaz. Po propoziciji 4.6 postoji $x_0 > 0$ takav da je kut paralelnosti $\alpha = \Pi(x_0) < \frac{\pi}{2}$. Neka je A točka na udaljenosti x_0 od pravca ℓ, a B nožište okomice iz A na ℓ. Po definiciji kuta paralelnosti, polupravac $\vec{k}$ s vrhom A koji s krakom $\overrightarrow{AB}$ zatvara kut mjere α ne siječe pravac ℓ, ali svaki polupravac u unutrašnjosti tog kuta siječe ℓ. Budući da je $\alpha < \frac{\pi}{2}$, vrijedi $\frac{\pi}{2} - \alpha > 0$. Izaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon < \min\{\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha\}$ i neka je $\vec{p}$ polupravac s vrhom A koji s krakom $\overrightarrow{AB}$ zatvara kut mjere $\alpha - \varepsilon > 0$. Taj polupravac leži u unutrašnjosti kuta $\angle(\overrightarrow{AB}, \vec{k})$, pa siječe pravac ℓ u nekoj točki P. Neka je C točka na pravcu ℓ takva da je P između B i C te vrijedi $|AP| = |PC|$ (slika 4.3). Tada je trokut ΔAPC jednakokračan, pa po propoziciji 3.2 vrijedi $\measuredangle PAC = \measuredangle PCA = \varphi$. Budući da polupravac $\overrightarrow{AC}$ siječe ℓ, on zatvara s krakom $\overrightarrow{AB}$ kut manji od kuta paralelnosti: $\measuredangle BAC < \alpha$. Iz toga također slijedi $\varphi < \varepsilon$. Defekt našeg trokuta je $\delta(ABC) = \pi - \measuredangle ABC - \measuredangle BAC - \measuredangle BCA = \pi - \frac{\pi}{2} - \measuredangle BAC - \varphi > \frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon > 0$ (jer smo ε izabrali tako da je $\varepsilon < \frac{\pi}{2} - \alpha$). □



Slika 4.3: Dokaz teorema 4.8.

Propozicija 4.9. *Neka je D točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta ΔABC. Tada je $\delta(ABC) = \delta(ADC) + \delta(DBC)$.*

Dokaz. Neka su α, β, γ mjere kutova trokuta ΔABC i $\measuredangle ACD = \gamma_1$, $\measuredangle BCD = \gamma_2$, $\measuredangle ADC = \varphi_1$, $\measuredangle BDC = \varphi_2$ (slika 4.4). Tada je $\delta(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$, $\delta(ADC) = \pi - \alpha - \varphi_1 - \gamma_1$ i $\delta(DBC) = \pi - \varphi_2 - \beta - \gamma_2$. Iz $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ i $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ slijedi $\delta(ADC) + \delta(DBC) = \delta(ABC)$. □



Slika 4.4: Dokaz propozicije 4.9.

Teorem 4.10. *U hiperboličnoj ravnini svaki trokut ima pozitivan defekt.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji trokut s defektom $\delta(ABC) = 0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je najveći kut pri vrhu C, pa je nožište okomice iz vrha C na pravac AB neka točka D na stranici $\overline{AB}$. Po propoziciji 4.9 vrijedi $\delta(ADC) + \delta(DBC) = \delta(ABC) = 0$. Budući da je defekt nenegativan, slijedi $\delta(ADC) = \delta(DBC) = 0$.

Sada imamo pravokutan trokut ΔADC s defektom 0. Pravi kut je pri vrhu D, a mjere druga dva kuta označimo $\alpha = \measuredangle DAC$ i $\gamma_1 = \measuredangle ACD$. Zbog $\delta(ADC) = 0$ vrijedi $\alpha + \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$. Zato polupravac $\vec{p}$ s vrhom A koji je okomit na AD i nalazi se s iste strane pravca AD kao točka C zatvara s krakom $\overrightarrow{AC}$ kut mjere $\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \vec{p}) = \gamma_1$. Izaberimo na tom polupravcu točku E takvu da je $|AE| = |CD|$. Po kriteriju SKS tada vrijedi sukladnost $\Delta EAC \cong \Delta DCA$. Slijedi $\measuredangle AEC = \measuredangle CDA = \frac{\pi}{2}$ i $\measuredangle ECA = \measuredangle DAC = \alpha$, iz čega slijedi $\measuredangle ECD = \measuredangle ECA + \measuredangle ACD = \alpha + \gamma_1 = \frac{\pi}{2}$. Vidimo da je četverokut $ADCE$ pravokutnik, pa bi po teoremu 3.27 svaki trokut trebao imati defekt 0. To je kontradikcija s teoremom 4.8. □

Dakle, zbroj mjera kutova svakog hiperboličnog trokuta je strogo manji od π. Možemo pomisliti da je u hiperboličnoj ravnini zbroj mjera kutova trokuta neka konstanta manja od π, ali to nije slučaj.

Propozicija 4.11. *U hiperboličnoj ravnini zbroj mjera kutova nije isti za sve trokute.*

Dokaz. Izaberimo bilo koji trokut ΔABC i podijelimo ga točkom D na stranici $\overline{AB}$ kao u propoziciji 4.9. Kad bi zbroj mjera kutova trokuta ΔABC bio jednak zbroju mjera kutova trokuta ΔADC, ta dva trokuta imala bi isti defekt $\delta(ABC) = \delta(ADC)$. Tada bi iz propozicije 4.9 slijedilo $\delta(DBC) = 0$, što je kontradikcija s teoremom 4.10. □

Propozicija 4.12. *Mjera vanjskog kuta trokuta veća je od zbroja mjera nasuprotnih unutarnjih kutova.*

Dokaz. Po teoremu 4.10 vrijedi $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, pa je $\alpha + \beta < \pi - \gamma$. Pritom je $\pi - \gamma$ mjera vanjskog kuta nasuprot unutanjim kutovima α i β. □

Propozicija 4.13. *Zbroj mjera kutova četverokuta manji je od 2π.*

Dokaz. Dijagonalom podijelimo četverokut na dva trokuta. Zbroj njihovih mjera kutova je manji od π, pa je zbroj mjera kutova četverokuta manji od 2π. □

Propozicija 4.14. *Zbroj mjera kutova konveksnog n-terokuta manji je od $(n-2)\pi$.*

Dokaz. Analogno, podijelimo n-terokut dijagonalama na $n - 2$ trokuta i primijenimo teorem 4.10. □

Propozicija 4.15. *Mjera četvrtog kuta Lambertova četverokuta manja je od $\frac{\pi}{2}$, a duljine stranica uz taj kut veće su od duljina nasuprotnih stranica.*

Dokaz. Slijedi iz dokaza teorema 3.29 i teorema 4.10. □

Propozicija 4.16. *Mjere kutova uz gornju osnovicu Saccherijeva četverokuta manje su od $\frac{\pi}{2}$, a duljina gornje osnovice veća je od duljine donje osnovice.*

Dokaz. Slijedi iz dokaza propozicija 3.30, 3.33 i teorema 4.10. □

Propozicija 4.17. *Obodni kut nad promjerom kružnice manji je od pravog kuta.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice sa središtem S i C točka na kružnici različita od A i B. Po definiciji kružnice je $|SA| = |SB| = |SC|$, pa su trokuti ΔSAC i ΔSBC jednakokračni i po propoziciji 3.2 vrijedi $\measuredangle SAC = \measuredangle SCA =: \alpha$, $\measuredangle SBC = \measuredangle SCB =: \beta$. Kutovi $\gamma_1 = \measuredangle ASC$ i $\gamma_2 = \measuredangle BSC$ su sukuti i vrijedi $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi$. Iz teorema 4.10 slijedi $2\alpha + \gamma_1 < \pi$ i $2\beta + \gamma_2 < \pi$, iz čega zbrajanjem slijedi $2\alpha + 2\beta + \pi < 2\pi$, tj. $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Pritom je $\alpha + \beta$ mjera obodnog kuta nad promjerom $\overline{AB}$ u vrhu C. □

Teorem 4.18 (KKK). *Ako za trokute ΔABC i $\Delta A'B'C'$ vrijedi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, onda su ta dva trokuta sukladna.*

Dokaz. Ako dokažemo da je $|AB| = |A'B'|$, sukladnost slijedi iz kriterija KSK. Pretpostavimo suprotno, $|AB| \neq |A'B'|$. Bez smanjenja općenitnosti možemo pretpostaviti $|AB| < |A'B'|$ (inače zamijenimo oznake vrhova). Neka je B'' jedinstvena točka na polupravcu $\overrightarrow{AB}$ takva da je $|AB''| = |A'B'|$. Zbog pretpostavke $|AB| < |A'B'|$ točka B je između A i B''. Neka je C'' jedinstvena točka na polupravcu $\overrightarrow{AC}$ takva da je $|AC''| = |A'C'|$. Tada po kriteriju SKS vrijedi $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$, pa je $\measuredangle AB''C'' = \beta' = \beta$ i $\measuredangle AC''B'' = \gamma' = \gamma$. Imamo tri slučaja.

1. Točke C'' i C se podudaraju, tj. $|AC| = |AC''|$. Dobivamo kontradikciju s teoremom 3.11 o vanjskom kutu trokuta $\Delta BB''C$: vanjski kut $\measuredangle ABC = \beta$ sukladan je unutarnjem kutu $\measuredangle BB''C = \beta$.

2. Točka C'' je između A i C, tj. $|AC| > |AC''|$. Po teoremu 3.10 ("Paschovu aksiomu") polupravac $\overrightarrow{C''B''}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u nekoj točki D. Ponovo dobivamo kontadikciju s teoremom 3.11 o vanjskom kutu trokuta $\Delta BB''D$.

3. Točka C je između A i C'', tj. $|AC| < |AC''|$. Kutovi $\angle ABC$ i $\angle CBB''$ su sukuti, pa je $\measuredangle CBB'' = \pi - \measuredangle ABC = \pi - \beta$. Analogno vidimo da je $\measuredangle BCC'' = \pi - \gamma$. No sada četverokut $CBB''B''$ ima mjere kutova redom $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, γ, β. Zbroj tih mjera je 2π, što je kontradikcija s propozicijom 4.13.

$\square$

U euklidskoj ravnini slučajevi 1. i 2. iz prethodnog dokaza također vode u kontradikciju. Slučaj 3. ne vodi u kontradikciju jer je zbroj kutova četverokuta zaista jednak 2π, a trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su slični. U hiperboličnoj ravnini trokuti ne mogu biti slični ako nisu sukladni.

4.3 Relacija asimptotičnosti

Relacija "biti disjunktan" na skupu svih pravaca hiperbolične ravnine kompliciranija je nego u euklidskoj ravnini. Iz euklidskog aksioma 7E slijedi svojstvo tranzitivnosti, pa je disjunktnost pravaca euklidske ravnine relacija ekvivalencije (uz dogovor da je svaki pravac u relaciji sam sa sobom, tj. da vrijedi refleksivnost). U hiperboličnoj ravnini ne vrijedi tranzitivnost, ali ipak možemo definirati analognu relaciju ekvivalencije na skupu svih usmjerenih pravaca.

Za pravac ℓ najprije definiramo relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu svih njegovih koordinatizacija iz aksioma 3: $x_1 \sim x_2$ ako postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $x_2(T) = x_1(T) + b$, $\forall T \in \ell$. Iz propozicije 2.4 slijedi da postoje točno dvije klase ekvivalencije, koje zovemo *orijentacijama* pravca ℓ. Uređen par $(\ell, [x])$ pravca i jedne njegove orijentacije zovemo *usmjerenim* ili *orijentiranim pravcem*.

Neka su $(\ell, [x])$ i $(m, [y])$ usmjereni pravci i T točka na ℓ. Označimo s $\vec{\ell} = \{P \in \ell \mid x(P) > x(T)\}$ polupravac s vrhom T "u smjeru" orijentacije $[x]$, a s N nožište okomice iz T na m. Kažemo da je ℓ *asimptotski* na m obzirom na točku T ako je $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell}) = \Pi(|TN|)$ (kut paralelnosti za udaljenost $|TN|$). To znači da polupravac $\vec{\ell}$ ne siječe m, ali svaki polupravac s vrhom T u unutrašnjosti kuta $\angle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell})$ siječe m. Prvo ćemo pokazati da relacija asimptotičnosti ne ovisi o izboru točke $T \in \ell$.

Teorem 4.19. *Neka su ℓ i m usmjereni pravci i $T, T' \in \ell$ dvije točke. Pravac ℓ je asimptotski na m obzirom na T ako i samo ako je asimptotski na m obzirom na T'.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x(T) < x(T')$, inače zamijenimo T i T'. Pretpostavimo da je ℓ asimptotski na m obzirom na T, tj. $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell}) = \Pi(|TN|)$. Dokazujemo da je tada ℓ asimptotski na m i obzirom na T'. Nožišta okomica iz T i T' na m označili smo N i N', a $\vec{\ell}$ i $\vec{\ell'}$ su odgovarajući polupravci na ℓ s vrhovima T i T'. Neka je $\vec{k}$ bilo koji polupravac s vrhom T' u unutrašnjosti kuta $\angle(\overrightarrow{T'N'}, \vec{\ell'})$ i P točka na $\vec{k}$. Polupravac $\overrightarrow{TP}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell})$, pa siječe m u nekoj točki Q. Po teoremu 3.10 ("Paschovu aksiomu") primijenjenom na trokut ΔTNQ, polupravac $\vec{k}$ siječe m. To vrijedi za svaki $\vec{k}$ u unutrašnjosti $\angle(\overrightarrow{T'N'}, \vec{\ell'})$, pa je ℓ asimptotski na m obzirom na T'.

Sad pretpostavimo da je ℓ asimptotski na m obzirom na T' i dokažimo da je tada asimptotski i obzirom na T. Neka je $\vec{k}$ polupravac s vrhom T u unutrašnjosti kuta $\angle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell})$. Izaberemo točku P na suprotnom polupravcu $-\vec{k}$ i neka je $\vec{k'}$ polupravac na PT' s vrhom T' koji leži u unutrašnjosti $\angle(\overrightarrow{T'N'}, \vec{\ell'})$. Po pretpostavci $\vec{k'}$ siječe m u nekoj točki Q. Polupravac $\vec{k}$ također siječe m po teoremu 3.9 o prečki primijenjenom na ΔNPQ. Budući da to vrijedi za svaki $\vec{k}$, usmjereni pravac ℓ je asimptotski na m obzirom na T. □

Ubuduće ćemo govoriti "ℓ je asimptotski na m" bez spominjanja točke. Sad pokazujemo da je relacija simetrična.

Teorem 4.20. *Ako je ℓ asimptotski na m, onda je m asimptotski na ℓ.*

Dokaz. □

Dakle, možemo govoriti "ℓ i m su asimptotski" (redoslijed nije bitan). Na kraju dokazujemo tranzitivnost.

Lema 4.21. *Neka su k i m dva usmjerena pravca asiptotska na usmjereni pravac ℓ. Onda jedan od ta tri pravca leži između druga dva, tj. druga dva pravca leže u različitim poluravninama određenim pravcem koji je između.*

Dokaz. □

Teorem 4.22. *Neka su k i m dva usmjerena pravca asiptotska na usmjereni pravac ℓ. Onda su k i m međusobno asimptotski.*

Dokaz. □

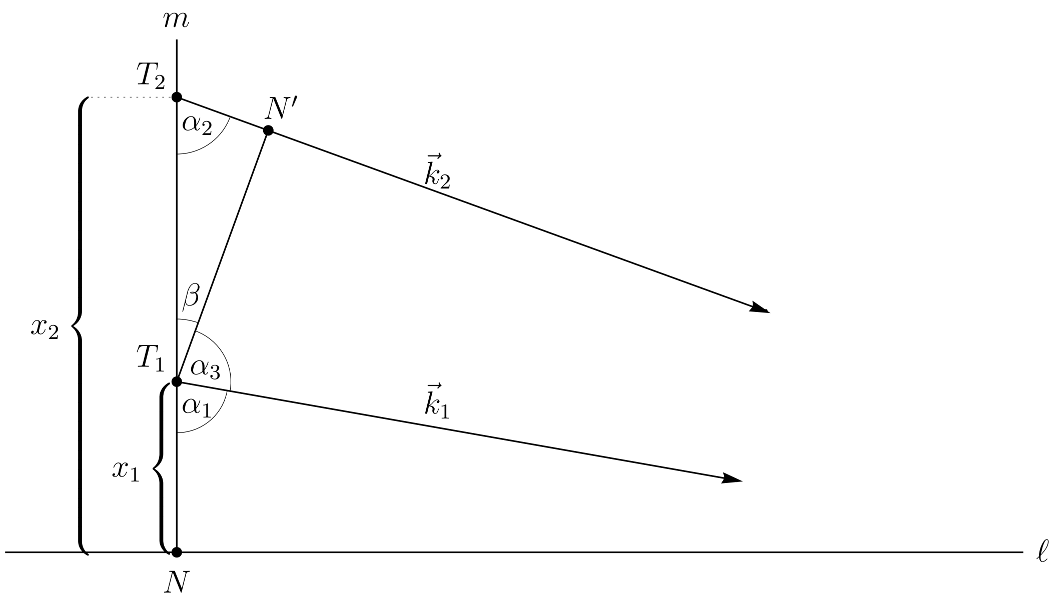
Dakle, relacija "biti asimptotski" na skupu svih usmjerenih pravaca hiperbolične ravnije je relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije zovemo *pramenovima asimptotskih pravaca*. U jednoj klasi su svi usmjereni pravci koji su asiptotski na zadani usmjereni pravac i oni su svi međusobno asimptotski. Koristeći se relacijom asimptotičnosti dokazat ćemo daljnja svojstva kuta paralelnosti.

Primjer: kako izgledaju asimptotski pravci u Beltrami-Kleinovu modelu?

4.4 Formula Bolyai-Lobačevskog

U propoziciji 4.5 dokazali smo da je kut paralelnosti padajuća funkcija, tj. da iz $x_1 < x_2$ slijedi $\Pi(x_1) \geq \Pi(x_2)$. Sad možemo dokazati strogu nejednakost $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$.

Propozicija 4.23. *Funkcija Π je strogo padajuća, tj. vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2)$.*



Slika 4.5: Funkcija Π je strogo padajuća.

Dokaz. Kao u dokazu propozicije 4.5 neka su ℓ i m okomiti pravci koji se sijeku u N, a $T_1, T_2 \in m$ točke s iste strane od ℓ takve da je $|NT_1| = x_1$ i $|NT_2| = x_2$. S iste strane od m povučemo polupravac $\vec{k}_1$ s vrhom T_1 koji s krakom $\overrightarrow{T_1N}$ zatvara kut paralelnosti $\alpha_1 = \Pi(x_1)$ i polupravac $\vec{k}_2$ s vrhom T_2 koji s krakom $\overrightarrow{T_2N}$ zatvara kut paralelnosti $\alpha_2 = \Pi(x_2)$. Neka je N' nožište okomice iz T_1 na pravac k_2. Pravci k_1 i k_2 orijentirani kao odgovarajući polupravci asimptotski su s ℓ, pa su po teoremu 4.22 i međusobno asimptotski. Zato je $\alpha_3 = \measuredangle(\overrightarrow{T_1N'}, \vec{k}_1) = \Pi(|T_1N'|)$ također kut paralelnosti, pa je $\alpha_3 \leq \frac{\pi}{2}$. Za kut $\beta = \measuredangle T_2T_1N'$ vrijedi $\beta + \alpha_3 + \alpha_1 = \pi \Rightarrow \beta + \alpha_1 = \pi - \alpha_3 \geq \frac{\pi}{2}$. S druge strane, pravokutni trokut $\Delta T_2T_1N'$ ima pozitivan defekt (teorem 4.10), pa je $\alpha_2 + \beta < \frac{\pi}{2}$. Oduzimanjem tih dviju nejednakosti slijedi $\alpha_2 - \alpha_1 < 0$, tj. $\Pi(x_2) = \alpha_2 < \alpha_1 = \Pi(x_1)$. $\square$

Korolar 4.24. *Za sve $x > 0$ vrijedi $\Pi(x) < \frac{\pi}{2}$.*

Dokaz. Kad bi postojao $x_0 > 0$ za koji je $\Pi(x_0) = \frac{\pi}{2}$, onda bi sa sve $x < x_0$ također vrijedilo $\Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ i funkcija Π ne bi bila strogo padajuća na $\langle 0, x_0\rangle$. $\square$

Definicija 4.25. *Neka su ℓ i m dva pravca koji se ne sijeku. Svaki od njih možemo orijentirati na dva načina, pa ukupno imamo četiri slučaja. Ako su u jednom od ta četiri slučaja usmjereni pravci asimptotski, za pravce ℓ i m kažemo da su* paralelni. *U suprotnom kažemo da su ℓ i m* ultraparalelni *pravci.*

Teorem 4.26. *Za svaki pravac ℓ i točku $T \notin \ell$ postoji beskonačno mnogo pravaca kroz T koji ne sijeku ℓ. Među njima su dva paralelna s ℓ, a ostali su ultraparalelni s ℓ.*

Dokaz. Neka je N nožište okomice iz T na ℓ i $\alpha_0 = \Pi(|TN|)$. Po korolaru 4.24 je $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. Izaberemo jednu od poluravnina $\mathcal{P}$ određenih pravcem TN, pa po aksiomu 5 (d) u njoj postoje polupravci $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ s vrhom T takvi da je $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{k}_1) = \alpha_0$ i $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{k}_2) = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$. Odgovarajući pravci k_1 i k_2 su paralelni s ℓ. Ako ℓ orijentiramo "u smjeru" poluravnine $\mathcal{P}$, a k_1 kao $\vec{k}_1$, usmjereni pravci su asimptotski. Ako pak ℓ orijentiramo u suprotnom smjeru, a k_2 kao $-\vec{k}_2$, ponovo dobivamo asimptotske usmjerene pravce. Za svaki $\alpha \in \langle \alpha_0, \frac{\pi}{2} - \alpha_0 \rangle$ iz aksioma 5 (d) dobivamo polupravac $\vec{k}_\alpha$ koji leži na pravcu ultraparalelnom s ℓ. Za $\alpha \in \langle 0, \alpha_0 \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2} - \alpha_0, \pi \rangle$ polupravac $\vec{k}_\alpha$ leži na pravcu koji siječe ℓ.

□

U nastavku dokazujemo još neka svojstva kuta paralelnosti.

Lema 4.27. *Ako duljina jedne stranice trokuta teži u nulu, a duljine preostalih dviju stranica su omeđene, onda defekt tog trokuta teži u nulu.*

Dokaz. Neka su duljine stranica i mjere kutova trokuta ΔABC označene standardno. Ako su $b, c \leq M$ za neku konstantu M, onda vrijedi $a \to 0$ ako i samo ako $\alpha \to 0$. Iz teorema SSS slijedi da je α jednoznačno određen s a, b, c. Trebalo bi dokazati neprekidnost te funkcije. Uzmimo pravokutni trokut $\Delta A_1B_1C_1$ s pravim kutem pri vrhu C_1, kutem pri vrhu A_1 mjere α i katetom $|A_1C_1| = M$. U taj trokut možemo "upisati" ΔABC, pa je $\delta(ABC) \leq \delta(A_1B_1C_1)$. Zato je dovoljno dokazati da $\delta(A_1B_1C_1) \to 0$ kad $\alpha \to 0$. Povučemo simetralu kuta $\angle C_1A_1B_1$ i neka ona siječe nasuprotnu stranicu u točki B_2. Tada je $\measuredangle C_1A_1B_2 = \frac{\alpha}{2}$. Neka je D nožište okomice iz B_2 na A_1B_1. Po kriteriju SKK vrijedi $\Delta A_1C_1B_2 \cong \Delta A_1DB_2$, pa ta dva trokuta imaju isti defekt. Zato je $\delta(A_1B_1C_1) = 2\delta(A_1B_2C_1) + \delta(B_1B_2D) > 2\delta(A_1B_2C_1)$, tj. $\delta(A_1B_2C_1) < \frac{1}{2}\delta(A_1B_1C_1)$. Sad povučemo simetralu kuta $\angle C_1A_1B_2$ i nastavimo analogno dalje. Tako dobivamo niz točaka B_n za koje vrijedi $\measuredangle C_1A_1B_n = \frac{\alpha}{2^{n-1}}$ i $\delta(A_1B_nC_1) < \frac{1}{2^{n-1}}\delta(A_1B_1C_1) \to 0$ kad $n \to +\infty$. □

Propozicija 4.28. $\lim\limits_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Dokaz. Neka je ΔABC pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C i katetom duljine $|AC| = x$. Ako pustimo da $x \to 0$, a pritom ne mijenjamo drugu katetu $|BC|$, po prethodnoj lemi vrijedi $\delta(ABC) \to 0$. Mjera kuta pri vrhu B također teži u nulu, pa za mjeru kuta pri vrhu A vrijedi $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Zbog $\alpha < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}$ zaključujemo da $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$. □

Propozicija 4.29. *Funkcija* $\Pi : \langle 0, +\infty \rangle \to \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ *je neprekidna.*

Dokaz. Pokazujemo neprekidnost u proizvoljnoj točki $x_1 \in \langle 0, +\infty \rangle$ tako da dokažemo $\lim\limits_{x_2\to x_1} \Pi(x_2) = \Pi(x_1)$. Koristimo iste oznake kao na slici 4.5. Vrijedi $\alpha_1 = \Pi(x_1)$, $\alpha_2 = \Pi(x_2)$, $\alpha_3 = \Pi(|T_1N'|)$. Stranica $\overline{T_1N'}$ je kateta, a $\overline{T_1T_2}$ hipotenuza pravokutnog trokuta $\Delta T_1T_2N'$. Po korolaru 3.4 vrijedi $|T_1N'| < |T_1T_2| = |x_2 - x_1|$. Funkcija Π je strogo padajuća, pa slijedi $\alpha_3 > \Pi(|x_2 - x_1|)$. Kad pustimo da $x_2 \to x_1$, po propoziciji 4.28 vrijedi $\Pi(|x_2 - x_1|) \to \frac{\pi}{2}$ iz čega slijedi $\alpha_3 \to \frac{\pi}{2}$. Budući da je $\alpha_1 + \alpha_3 + \beta = \pi$, tada i $\alpha_1 + \beta \to \frac{\pi}{2}$. S druge strane, po lemi 4.27 vrijedi $\beta + \alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$. Oduzimanjem vidimo da $\alpha_2 - \alpha_1 \to 0$, odnosno $\alpha_2 = \Pi(x_2) \to \alpha_1 = \Pi(x_1)$. □

Propozicija 4.30. $\lim\limits_{x\to +\infty} \Pi(x) = 0$.

Dokaz. Funkcija Π je strogo padajuća i ograničena odozdo s 0, pa sigurno postoji limes $\lim\limits_{x\to +\infty} \Pi(x) = \alpha_0 \geq 0$. Pretpostavimo da je $\alpha_0 > 0$. Opet koristimo oznake sa slike 4.5, ali sad uzmimo da je $|T_1T_2| = 1$. Tada je $\alpha_1 = \Pi(x_1)$, $\alpha_2 = \Pi(x_1 + 1)$ i $\alpha_3 = \Pi(|T_1N'|)$.

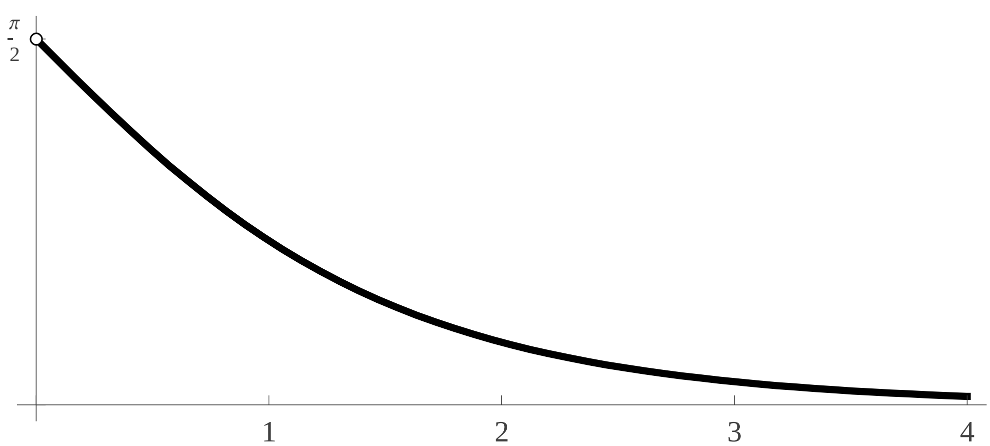
Kad $x_1 \to +\infty$, onda $\alpha_1 \to \alpha_0$ i $\alpha_2 \to \alpha_0$, a udaljenost $|T_1N'|$ teži nekoj konstantnoj vrijednosti $x_0 > 0$ izvedenoj iz kriterija sukladnosti SKK primijenjenog na trokut sa stranicom duljine $|T_1T_2| = 1$, nasuprotni kut mjere $\frac{\pi}{2}$ i kut pri vrhu T_2 mjere α_0. Trebalo bi dokazati neprekidnost funkcije $|T_1N'| = SKK(1, \alpha, \frac{\pi}{2})$ u varijabli α. Zbog neprekidnosti funkcije Π znamo da $\alpha_3 \to \Pi(x_0)$. Trokut $\Delta T_1T_2N'$ ima pozitivan defekt, pa je $\alpha_2+\beta < \frac{\pi}{2}$. Iz $\alpha_1+\alpha_3+\beta = \pi$ izrazimo β i uvrstimo u nejednakost, pa dobijemo $\alpha_2+\pi-\alpha_1-\alpha_3 < \frac{\pi}{2}$, odnosno $\alpha_3 > \frac{\pi}{2}+\alpha_2-\alpha_1$. Prijelazom na limes kad $x_1 \to +\infty$ slijedi $\Pi(x_0) \geq \frac{\pi}{2}+\alpha_0-\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, što je kontradikcija s korolarom 4.24. Dakle, mora biti $\alpha_0 = 0$. $\square$

Sada znamo da graf funkcije $\Pi(x)$ izgleda kao na slici 4.6. János Bolyai i Nikolai Ivanovič Lobačevski našli su formulu za tu funkciju, koju možemo izvesti u modelu H^2. U pravokutnom trokutu s katetama duljina x i y označimo s α mjeru kuta nasuprot y. Ako pustimo da $y \to +\infty$ i držimo x konstantnim, onda $\alpha \to \Pi(x)$. Po korolaru 1.47 vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x}$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x}\right)$. Iz toga slijedi

$$\Pi(x) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\cdot \lim_{y\to+\infty} \operatorname{th} y\right) =$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\cdot \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right).$$

Formulu možemo zapisati kao $\operatorname{tg}\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$, odnosno $\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{sh} x$. Ekvivalentni zapisi su $\cos\Pi(x) = \operatorname{th} x$, $\sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ i $\Pi(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{-x})$.

Do formule za kut paralelnosti došli smo u modelu hiperbolične ravnine H^2. Iz aksioma hiperbolične ravnine može se dokazati da postoji konstanta $k > 0$ takva da formula glasi $\Pi(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}})$. Konstanta k pojavljuje se u ekvivalentnim zapisima formule Bolyai-Lobačevskog i u svim trigonometrijskim formulama koje smo u cjelini 1.5 izvodili u modelu H^2. Pokazuje se da je $k = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, gdje je K Gaussova zakrivljenost hiperbolične ravnine (koja je konstantna i negativna). Naš model H^2 ima jediničnu zakrivljenost $K=-1$, pa je $k=1$ i formule su jednostavnije.



Slika 4.6: Graf funkcije $\Pi(x)$.

Općenito, "izborom jedinične dužine" možemo postići da zakrivljenost bude jedinična i formule ne sadrže konstantu k. To znači da metriku iz aksioma 2 i koordinatizacije pravaca iz aksioma 3 zamjenjujemo proporcionalnim funkcijama, tj. množimo ih nekom pozitivnom konstantom. To je još jedna razlika hiperbolične prema euklidskoj geometriji. U euklidskoj ravnini ne postoji "kanonski izbor" jedinične dužine. Skaliranje metrike ne mijenja formule euklidske trigonometrije.

4.5 Neprave točke i asimptotski trokuti

Euklidsku ravninu proširujemo do projektivne ravnine tako da paralelnim pravcima dodamo "točku u beskonačnosti" u kojoj se sijeku. Točnije, dodajemo klase međusobno paralelnih pravaca kao nove točke i jedan "pravac u beskonačnosti" na kojem leže sve nove točke. Na sličan način proširujemo hiperboličnu ravninu: pramenove međusobno asimptotskih usmjerenih pravaca proglasimo *nepravim točkama*. Za nepravu točku K kažemo da je incidentna s pravcem ℓ ako ga možemo orijentirati tako da bude asimptotski s usmjerenim pravcima iz K (tj. pripada pramenu K). Dakle, svaki pravac ℓ incidentan je s dvije neprave točke: s pramenom kojem pripada orijentirani pravac $(\ell, [x])$ i s pramenom kojem pripada orijentirani pravac $(\ell, [-x])$. Dokažimo da relacija incidencije proširene hiperbolične ravnine ima ista svojstva kao prije proširenja.

Propozicija 4.31. *Za svaku točku T i za svaku nepravu točku K postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži.*

Dokaz. Za dokaz egzistencije uzmimo bilo koji usmjereni pravac ℓ iz pramena K. Ako je točka T na ℓ, onda je ℓ traženi pravac koji sadrži T i K. U suprotnom neka je N nožište okomice iz T na ℓ. Okomica TN dijeli ravninu na dvije poluravnine, od kojih je jedna "u smjeru" orijentacije od ℓ. U toj poluravnini izaberemo polupravac $\vec{k}$ takav da je $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{k}) = \Pi(|NT|)$. Tada usmjereni pravac k (s orijentacijom u smjeru $\vec{k}$) pripada pramenu K, a odgovarajući pravac k (bez orijentacije) je spojnica T i K. Za jedinstvenost primijetimo da su dva usmjerena pravca $\ell_1, \ell_2 \in K$ asimptotska, pa su disjunktni. Zato ne mogu oba sadržati točku T. $\square$

Propozicija 4.32. *Za svake dvije neprave točke K i L postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži.*

Dokaz. Za egzistenciju uzmimo bilo koju točku T hiperbolične ravnine. Po prethodnoj propoziciji postoje usmjereni pravci $k \in K$ i $\ell \in L$ koji prolaze kroz T. Ako je to isti pravac sa suprotnim orijentacijama, imamo spojnicu K i L. U suprotnom polupravci $\vec{k}$ i $\vec{\ell}$ s vrhom T zatvaraju kut mjere manje od π. Neka je $\vec{m}$ polupravac s vrhom T koji je simetrala tog kuta. Tada je $\alpha = \measuredangle(\vec{k}, \vec{m}) = \frac{1}{2}\measuredangle(\vec{k}, \vec{\ell}) < \frac{\pi}{2}$, pa zbog bijektivnosti funkcije $\Pi : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ postoji jedinstveni $x > 0$ takav da je $\Pi(x) = \alpha$. Izaberemo točku N na $\vec{m}$ takvu da je $|TN| = x$ i povučemo okomicu o na m kroz N. Kut $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{k}) = \alpha$ je kut paralelnosti za udaljenost $|TN| = x$, pa su uz odgovarajuću orijentaciju pravci o i k asimpotski, odnosno $o \in K$. Uz suprotnu orijentaciju pravca o asimptotski je s ℓ, odnosno $o \in L$. Dakle, o je spojnica K i L. Za jedinstvenost pretpostavimo da imamo dva pravca k i ℓ koji su asimptotski u dva smjera. Tada bi za točku $T \in \ell$ i odgovarajuće nožište okomice $N \in k$ kutovi $\angle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell})$ i $\angle(\overrightarrow{TN}, -\vec{\ell})$ bili sukuti i oba bi imala mjeru $\Pi(|TN|)$. Slijedilo bi $\Pi(|TN|) = \frac{\pi}{2}$, što je kontradikcija s korolarom 4.24. $\square$

Propozicija 4.33. *Za svaku nepravu točku K i svaki pravac ℓ koji nisu incidentni postoji jedinstveni pravac k koji sadrži K i okomit je na ℓ.*

Dokaz. Za dokaz egzistencije uzmimo bilo koju točku $T \in \ell$. Po propoziciji 4.31 postoji jedinstveni pravac m koji je spojnica T i K, pa uz odgovarajuću orijentaciju vrijedi $m \in K$. Ako je $m \perp \ell$, imamo okomicu iz K na ℓ. U suprotnom izaberimo polupravac $\vec{\ell}$ s vrhom T tako da vrijedi $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{TK}, \vec{\ell}) < \frac{\pi}{2}$. Zbog bijektivnosti $\Pi : \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ postoji jedinstveni $x > 0$ takav da je $\Pi(x) = \alpha$. Izaberimo točku N na $\vec{\ell}$ tako da je $|TN| = x$ i neka je k okomica na ℓ kroz N. Uz odgovarajuću orijentaciju k je asimptotski s m, jer je α kut paralelnosti za udaljenost x, pa je $k \in K$ i ponovo imamo okomicu iz K na ℓ. Za dokaz jedinstvenosti pretpostavimo da su k_1 i k_2 dvije okomice iz K na ℓ s nožištima N_1 i N_2. Kut paralelnosti $\Pi(|N_1N_2|)$ je po korolaru 4.24 manji od $\frac{\pi}{2}$, a u našoj situaciji bio bi jednak $\frac{\pi}{2}$. Primijetimo da su k_1 i k_2 međusobno asimptotski jer pripadaju istom pramenu K. $\square$

Asimptotski trokuti proširene hiperbolične ravnine su trokuti kojima su neki od vrhova neprave točke. Neprave vrhove nazivamo *krajevima* asimptotskog trokuta. *Jednokrajnik* je trokut s jednim krajem i dva vrha, *dvokrajnik* je trokut s dva kraja i jednim vrhom, a *trokrajnik* je trokut s tri kraja (slika 4.15). Za asimptotske trokute također vrijedi Paschov aksiom, tj. teorem 3.10.

Propozicija 4.34. *Neka je ΔABK jednokrajnik s vrhovima A, B i krajem K. Ako pravac ℓ ne prolazi kroz A, B, K i siječe jednu stranicu jednokrajnika, onda siječe još jednu od preostale dvije stranice.*

Dokaz. Neka ℓ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki T. Polupravac $\vec{\ell}$ s vrhom T koji "ulazi" u jednokrajnik leži u unutrašnjosti jednog od dva sukuta $\angle ATK$ ili $\angle KTB$ (jer ne prolazi kroz K). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da leži u $\angle ATK$ i spustimo okomicu iz T na AK s nožištem N. Ako je $\vec{\ell}$ u unutrašnjosti kuta $\angle ATN$, siječe stranicu $\overline{AN}$ po teoremu 3.9 o prečki. Ako je pak $\vec{\ell}$ u unutražnjosti kuta $\angle NTK$, siječe $\overrightarrow{NK}$ jer je $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \vec{\ell})$ manji od kuta paralelnosti $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \overrightarrow{TK}) = \Pi(|TN|)$ (AK i TK su asimptotski jer pripadaju istom pramenu K).

Neka sada ℓ siječe stranicu $\overrightarrow{AK}$ u točki T. Tada polupravac $\vec{\ell}$ s vrhom T koji "ulazi" u jednokrajnik leži u unutrašnjosti jednog od sukuta $\angle ATB$ ili $\angle BTK$. U prvom slučaju siječe $\overline{AB}$ po teoremu 3.9 o prečki. U drugom slučaju povučemo okomicu kroz T na AK s nožištem N. Ako je $\vec{\ell}$ u unutrašnjosti kuta $\angle BTN$ ponovo koristimo teorem o prečki, a ako je u unutrašnjosti kuta $\angle NTK$ siječe $\overrightarrow{NK}$ po definiciji kuta paralelnosti $\measuredangle(\overrightarrow{TN}, \overrightarrow{TK}) = \Pi(|TN|)$. Dokaz je analogan ako ℓ siječe stranicu $\overrightarrow{BK}$. $\square$

Na sličan način dokazujemo odgovarajuće propozicije za dvokrajnike i trokrajnike.

Propozicija 4.35. *Neka je ΔAKL dvokrajnik s vrhom A i krajevima K, L. Ako pravac ℓ ne prolazi kroz A, K, L i siječe jednu stranicu dvokrajnika, onda siječe još jednu od preostale dvije stranice.*

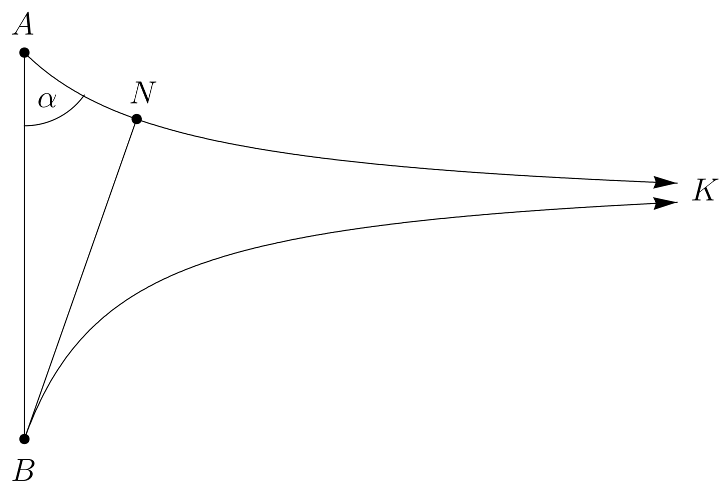
Propozicija 4.36. *Neka je ΔKLM trokrajnik. Ako pravac ℓ ne prolazi kroz K, L, M i siječe jednu stranicu trokrajnika, onda siječe još jednu od preostale dvije stranice.*

Neka su ΔABK i $\Delta A'B'K'$ jednokrajnici s mjerama kutova $\alpha = \measuredangle BAK$, $\beta = \measuredangle ABK$, $\alpha' = \measuredangle B'A'K'$ i $\beta' = \measuredangle A'B'K'$. Kažemo da su *sukladni* i pišemo $\Delta ABK \cong \Delta A'B'K'$ ako vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$. Kao i za trokute, dovoljno je provjeriti samo neka od podudaranja.

Teorem 4.37 (SK)**.** *Ako za jednokrajnike ΔABK i $\Delta A'B'K'$ vrijedi $|AB| = |A'B'|$ i $\alpha = \alpha'$, onda su ta dva jednokrajnika sukladna.*

Dokaz. Trebamo dokazati $\beta = \beta'$. Spustimo okomicu iz B na AK te iz B' na $A'K'$. Neka nožišta N, N' leže na polupravcima $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{A'K'}$, što je ekvivalentno s $\alpha = \alpha' < \frac{\pi}{2}$ (slika 4.7). Dokaz je sličan u slučaju $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$, kad je $A = N$ i $A' = N'$, te u slučaju $\alpha = \alpha' > \frac{\pi}{2}$, kad su N, N' na suprotnim polupravcima $-\overrightarrow{AK}$, $-\overrightarrow{A'K'}$.

Po kriteriju SKK (teoremu 3.16) vrijedi sukladnost $\Delta ABN \cong \Delta A'B'N'$. Iz toga slijedi $\measuredangle ABN = \measuredangle A'B'N'$ i $|BN| = |B'N'|$. Dalje imamo $\measuredangle NBK = \Pi(|BN|) = \Pi(|B'N'|) = \measuredangle N'B'K'$. Iz aditivnosti kutne mjere (aksioma 5 (c)) slijedi $\beta = \measuredangle ABK = \measuredangle ABN + \measuredangle NBK = \measuredangle A'B'N' + \measuredangle N'B'K' = \measuredangle A'B'K' = \beta'$. □

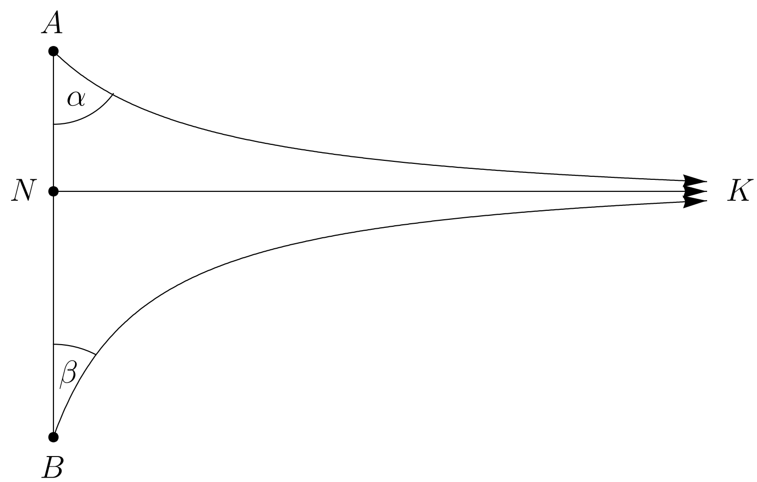


Slika 4.7: Dokaz teorema 4.37.

Teorem 4.38 (KK)**.** *Ako za jednokrajnike ΔABK i $\Delta A'B'K'$ vrijedi $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$, onda su ta dva jednokrajnika sukladna.*

Dokaz. Trebamo dokazati $|AB| = |A'B'|$. Spustimo okomicu iz neprave točke K na pravac AB te iz K' na $A'B'$ (propozicija 4.33). Neka nožišta N, N' leže na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, što je ekvivalentno s $\alpha = \alpha' < \frac{\pi}{2}$ i $\beta = \beta' < \frac{\pi}{2}$. Dokaz je sličan u slučajevima $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$ ($N = A$ i $N' = A'$), $\beta = \beta' = \frac{\pi}{2}$ ($N = B$ i $N' = B'$), $\alpha = \alpha' > \frac{\pi}{2}$ ($N \in -\overrightarrow{AB}$ i $N' \in -\overrightarrow{A'B'}$) te $\beta = \beta' > \frac{\pi}{2}$ ($N \in -\overrightarrow{BA}$ i $N' \in -\overrightarrow{B'A'}$).

U našem slučaju iz bijektivnosti kuta paralelnosti $\Pi : \langle 0, +\infty \rangle \to \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ slijedi $|AN| = \Pi^{-1}(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha') = |A'N'|$ i $|BN| = \Pi^{-1}(\beta) = \Pi^{-1}(\beta') = |B'N'|$, iz čega dobijemo $|AB| = |AN| + |NB| = |A'N'| + |N'B'| = |A'B'|$. □



Slika 4.8: Dokaz teorema 4.38.

Vidjeli smo da je trokut određen s tri veličine do na sukladnost, a jednokrajnik s dvije veličine. Dvokrajnici i trokrajnici imaju još manje "stupnjeva slobode", tj. određeni su s manje veličina do na sukladnost. Iskažite i dokažite kriterije sukladnosti za dvokrajnike i trokrajnike (zadatak 4.12).

4.6 Udaljenost paralelnih i ultraparalelnih pravaca

U euklidskoj ravnini udaljenost paralelnih pravaca ℓ i m je konstantna. To znači da je za svaki izbor točke $T \in \ell$ udaljenost $d(T, m)$ ista. U ovoj cjelini proučavamo udaljenost pravaca hiperbolične ravnine koji se ne sijeku.

Prvo pretpostavimo da su ℓ i m paralelni, tj. da postoje koordinatizacije $x : \ell \to \mathbb{R}$ i $y : m \to \mathbb{R}$ takve da su usmjereni pravci $(\ell, [x])$ i $(m, [y])$ asimptotski. Definirajmo funkciju

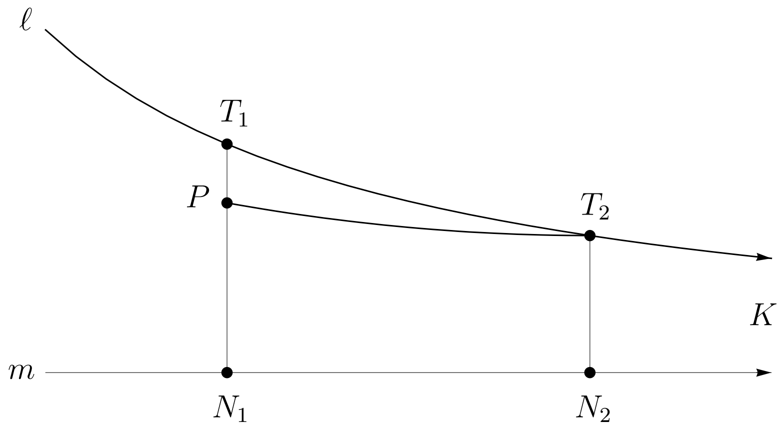
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(t) = d(x^{-1}(t), m) \tag{4.1}$$

i proučimo njezina svojstva.

Teorem 4.39. *Funkcija f definirana s* (4.1) *je strogo padajuća.*

Dokaz. Neka su $t_1 < t_2$ i $T_1 = x^{-1}(t_1)$, $T_2 = x^{-1}(t_2)$ odgovarajuće točke na pravcu ℓ, a N_1 i N_2 nožišta okomica kroz te točke na pravac m. Označimo s K nepravu točku kojoj pripadaju usmjereni pravci $(\ell, [x])$ i $(m, [y])$. Kut $\angle N_2T_2K$ je kut paralelnosti, pa mu je mjera $\measuredangle N_2T_2K < \frac{\pi}{2}$ (korolar 4.24). Zato je mjera sukuta $\measuredangle N_2T_2T_1 > \frac{\pi}{2}$, pa okomica na pravac N_2T_2 kroz točku T_2 leži u unutrašnjosti kuta $\angle N_1T_2T_1$. Po teoremu o prečki 3.9, ta okomica siječe stranicu $\overline{N_1T_1}$ u nekoj točki P. Četverokut $N_1N_2T_2P$ je Lambertov, pa po propoziciji 4.15 vrijedi $f(t_1) = |T_1N_1| > |PN_1| > |T_2N_2| = f(t_2)$. □

Lema 4.40. *Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ četverokuti sa stranicama duljina $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, odnosno $a' = |A'B'|$, $b' = |B'C'|$, $c' = |C'D'|$, $d' = |D'A'|$ te kutovima mjera $\alpha = \measuredangle DAB$, $\beta = \measuredangle ABC$, $\gamma = \measuredangle BCD$, $\delta = \measuredangle CDA$, odnosno $\alpha' = \measuredangle D'A'B'$, $\beta' = \measuredangle A'B'C'$, $\gamma' = \measuredangle B'C'D'$, $\delta' = \measuredangle C'D'A'$. Neka su $\alpha = \alpha' = \delta = \delta' = \frac{\pi}{2}$ pravi kutovi. Ako je $a = a'$, $\beta = \beta'$ i $b = b'$, onda su ta dva četverokuta sukladna.*



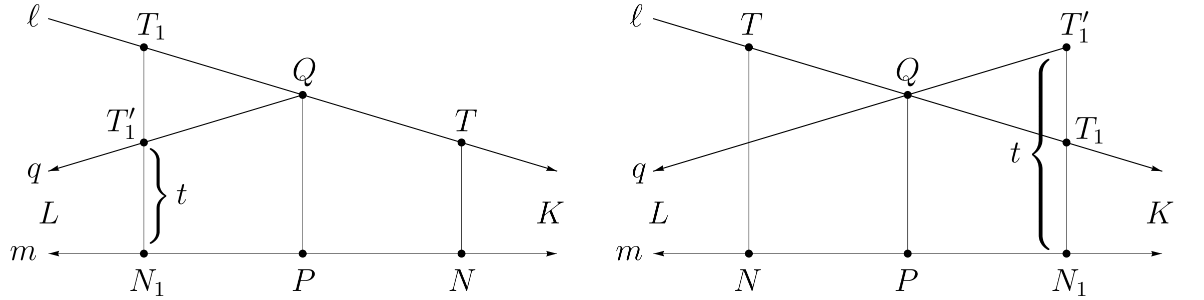
Slika 4.9: Dokaz teorema 4.39.

Dokaz. Po kriteriju SKS (teoremu 3.14) vrijedi sukladnost trokuta $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Iz toga slijedi $|AC| = |A'C'|$, $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'$ i $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$. Iz zadnje jednakosti slijedi $\measuredangle CAD = \frac{\pi}{2} - \measuredangle BAC = \frac{\pi}{2} - \measuredangle B'A'C' = \measuredangle C'A'D'$, pa po kriteriju SKK (teoremu 3.16) vrijedi $\Delta ACD \cong \Delta A'C'D'$. Sad vidimo da su i ostale odgovarajuće veličine četverokuta sukladne: $c = c'$, $d = d'$ i $\gamma = \measuredangle BCA + \measuredangle ACD = \measuredangle B'C'A' + \measuredangle A'C'D' = \gamma'$. □

Teorem 4.41. *Ako su pravci ℓ i m paralelni, onda za svaki $t > 0$ postoji jedinstvena točka $T \in \ell$ takva da je $d(T, m) = t$.*

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz teorema 4.39. Za egzistenciju uzmimo bilo koju točku $T_1 \in \ell$ i neka je N_1 nožište okomice iz T_1 na m. Ako je $|T_1N_1| = t$, uzmemo $T = T_1$. U suprotnom imamo dvije mogućnosti: $|T_1N_1| > t$ ili $|T_1N_1| < t$. U prvom slučaju neka je T_1' točka na dužini $\overline{T_1N_1}$ za koju je $|T_1'N_1| = t$. Označimo s K nepravu točku kojoj pripadaju usmjereni pravci $(\ell, [x])$ i $(m, [y])$, a s L nepravu točku kojoj pripada $(m, [-y])$ (drugu nepravu točku na pravcu m). Neka je q spojnica točke T_1' i neprave točke L (propozicija 4.31). Pravac q siječe stranicu $\overline{T_1N_1}$ jednokrajnika ΔT_1N_1K, pa po Paschovu aksiomu (propoziciji 4.34) siječe još jednu stranicu. Budući da su q i m paralelni (tj. asimptotski s orijentacijom prema L), sjecište Q je na stranici $\overrightarrow{T_1K}$. Neka je T točka na polupravcu $\overrightarrow{QK}$ takva da je $|QT_1'| = |QT|$, a P i N nožišta okomica iz Q i T na m (slika 4.10 lijevo). Po lemi 4.40 četverokuti $PQT_1'N_1$ i $PQTN$ su sukladni: kutovi pri vrhovima N_1, P i N su pravi, stranica $\overline{PQ}$ je zajednička, stranice $\overline{QT_1'}$ i $\overline{QT}$ su sukladne po izboru točke T, a kutovi pri vrhu Q su sukladni jer im je mjera kut paralelnosti za udaljenost $|QP|$. Stoga je $|TN| = |T_1'N_1| = t$.

U drugom slučaju ($|T_1N_1| < t$) dokaz je sličan. Izaberemo točku T_1' na polupravcu $\overrightarrow{N_1T_1}$ takvu da je $|T_1'N_1| = t$. Neka je q spojnica točke T_1' i neprave točke L. Pravac ℓ siječe stranicu $\overline{T_1'N_1}$ jednokrajnika $\Delta T_1'N_1L$ u točki T_1, pa po propoziciji 4.34 siječe još jednu stranicu. Budući da su ℓ i m paralelni, sjecište Q je na stranici $\overrightarrow{T_1'L}$. Izaberemo točku T na polupravcu $-\overrightarrow{QT_1'}$ tako da je $|QT_1'| = |QT|$ i označimo nožišta okomica iz Q i T na m s P i N (slika 4.10 desno). Po lemi 4.40 četverokuti $PQT_1'N_1$ i $PQTN$ su sukladni, pa je $|TN| = |T_1'N_1| = t$. □



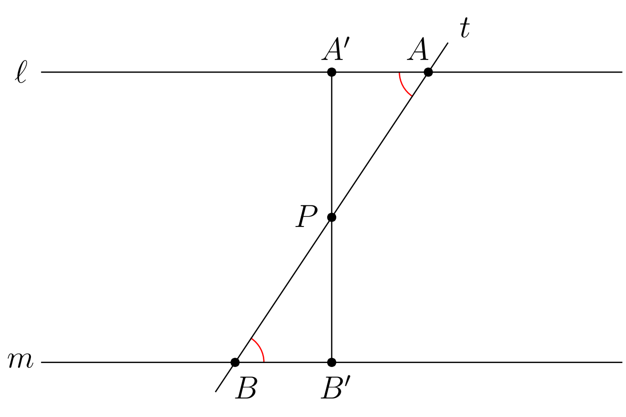
Slika 4.10: Dokaz teorema 4.41.

Korolar 4.42. *Za funkciju f definiranu s (4.1) vrijedi $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ i $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = +\infty$.*

Dokaz. Po teoremu 4.39 funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je strogo padajuća, a po teoremu 4.41 poprima sve pozitivne vrijednosti (surjektivna je). Zato mora imati navedene limese. $\square$

Dakle, udaljenost paralelnih pravaca teži prema 0 u smjeru asimptotičnosti, a u suprotnom smjeru teži prema $+\infty$. Proučimo sada udaljenost ultraparalelnih pravaca. Po definiciji, to su pravci ℓ i m koji se ne sijeku i nisu asimptotski kako god ih orijentirali. Takvi pravci zaista postoje: uzmimo bilo koji pravac n, dvije točke $T, N \in n$ i neka su ℓ i m redom okomice na n kroz T i N. Tada pravac ℓ zatvara kut mjere $\frac{\pi}{2}$ s polupravcem $\overrightarrow{TN}$, a po korolaru 4.24 kut paralelnosti je $\Pi(|TN|) < \frac{\pi}{2}$. Zato ℓ nije asimptotski s m uz bilo koju orijentaciju. Pokazat ćemo da je ovo najopćenitiji primjer ultraparalelnih pravaca, tj. da svaka dva ultraparalelna pravca imaju zajedničku normalu. Dokažimo prvo hiperboličnu verziju teorema 3.1 o nasuprotnim unutarnjim kutovima.

Lema 4.43. *Ako transverzala siječe dva pravca tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni, onda su ta dva pravca ultraparalelni.*



Slika 4.11: Dokaz leme 4.43.

Dokaz. Neka transverzala t siječe pravce ℓ, m u točkama A, B tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni. Ako su to pravi kutovi, onda je t zajednička normala, a vidjeli smo da su u tom slučaju ℓ i m ultraparalelni. U suprotnom neka je P polovište dužine

$\overline{AB}$, A' nožište okomice iz P na ℓ i B' nožište okomice iz P na m. Po kriteriju SKK (teoremu 3.16) vrijedi sukladnost $\Delta A'PA \cong \Delta B'PB$, pa je $\measuredangle A'PA = \measuredangle B'PB$. Iz toga slijedi da su točke A', P i B' kolinearne, tj. $A'B'$ je zajednička normala od ℓ i m. Dakle, ℓ i m su u svakom slučaju ultraparalelni. □

Lema 4.44. *Zbroj mjera dvaju kutova u vrhovima jednokrajnika je manji od π.*

Dokaz. Neka je ΔABK jednokrajnik s kutovima mjera α i β u vrhovima A i B. Neka je $\vec{\ell}$ polupravac s vrhom B koji zatvara kut mjere α s krakom $\overrightarrow{BA}$ u suprotnoj poluravnini od kraja K. Neka je L neprava točka na odgovarajućem pravcu ℓ u istoj poluravnini kao K (tj. u suprotnom smjeru od polupravca $\vec{\ell}$). Pravac AB je transverzala pravaca AK i ℓ koja ih siječe tako da su nasuprotni unutarnji kutovi sukladni, pa su po prethodnoj lemi AK i ℓ ultraparalelni. Zato je $\beta = \measuredangle ABK < \measuredangle ABL = \pi - \alpha$, tj. $\alpha + \beta < \pi$. □

Teorem 4.45. *Svaka dva ultraparelelna pravca ℓ i m imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*

Dokaz. Kad bi pravci imali dvije zajedničke normale, dobili bismo pravokutnik. U hiperboličnoj ravnini ne postoji pravokutnik (teoremi 3.27 i 3.28), pa je zajednička normala jedinstvena, ako postoji.

Za egzistenciju uzmimo bilo koje dvije točke $T_1, T_2 \in \ell$ i neka su N_1, N_2 nožišta odgovarajućih okomica na m. Ako je $|T_1N_1| = |T_2N_2|$, četverokut $N_1N_2T_2T_1$ je Saccherijev. Spojnica polovišta donje osnovice $\overline{N_1N_2}$ i gornje osnovice $\overline{T_1T_2}$ je po propoziciji 3.31 zajednička normala od ℓ i m. U suprotnom, ako je $|T_1N_1| \neq |T_2N_2|$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|T_1N_1| > |T_2N_2|$. Konstruirat ćemo točke $S_1, S_2 \in \ell$ s nožištima M_1, M_2 odgovarajućih okomica na m takve da je $|S_1M_1| = |S_2M_2|$. Tada je četverokut $M_1M_2S_2S_1$ Saccherijev i na isti način dobivamo zajedničku normalu od ℓ i m. Konstrukcija točaka S_1 i S_2 sastoji se od sljedećih koraka:

1. Neka je T_1' točka na dužini $\overline{T_1N_1}$ takva da je $|T_1'N_1| = |T_2N_2|$.

2. Neka je K neprava točka na pravcu ℓ u smjeru $\overrightarrow{T_1T_2}$, a L neprava točka na pravcu m u smjeru $\overrightarrow{N_1N_2}$.

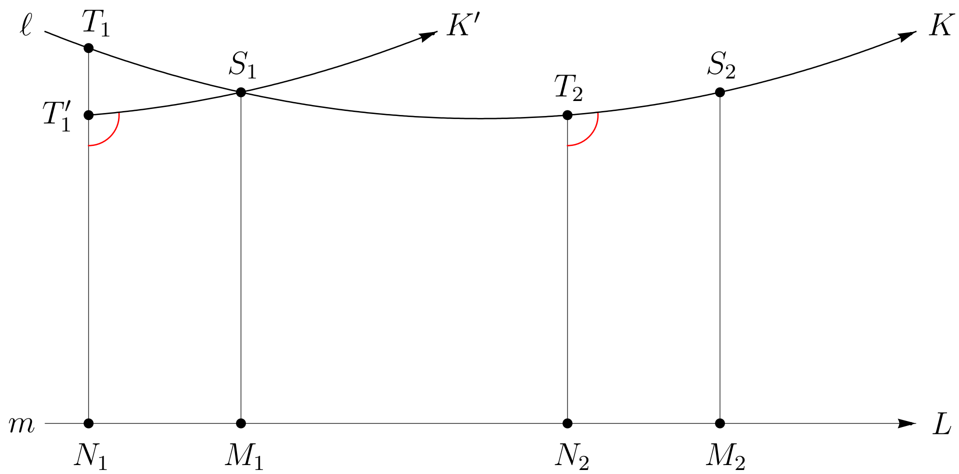
3. Neka je K' neprava točka takva da je $\measuredangle N_1T_1'K' = \measuredangle N_2T_2K$. Tvrdimo da polupravac $\overrightarrow{T_1'K'}$ siječe pravac ℓ u nekoj točki S_1, što ćemo dokazati kasnije.

4. Neka je S_2 točka na polupravcu $\overrightarrow{T_2K}$ takva da je $|T_1S_1| = |T_2S_2|$.

5. Označimo nožišta okomica iz S_1 i S_2 na m sa M_1 i M_2.

Po lemi 4.40 četverokuti $N_1T_1'S_1M_1$ i $N_2T_2S_2M_2$ su sukladni. Iz toga slijedi $|S_1M_1| = |S_2M_2|$ i dokaz je gotov, ali treba još dokazati tvrdnju iz 3. koraka konstrukcije.

Za dokaz te tvrdnje primijetimo najprije da po teoremu 4.37 vrijedi sukladnost jednokrajnika $\Delta T_1'N_1K' \cong \Delta T_2N_2K$. Iz toga slijedi $\measuredangle T_1'N_1K' = \measuredangle T_2N_2K$, odnosno $\measuredangle LN_1K' = \measuredangle LN_2K$. Iz leme 4.44 primijenjene na ΔN_1N_2K slijedi $\measuredangle N_1N_2K + \measuredangle N_2N_1K < \pi$, a kako je $\measuredangle N_1N_2K = \pi - \measuredangle LN_2K$ time smo dokazali $\measuredangle N_2N_1K < \measuredangle LN_2K$, odnosno $\measuredangle LN_1K < \measuredangle LN_2K = \measuredangle LN_1K'$. Spustimo li okomicu iz N_1 na ℓ, vidimo da je kut

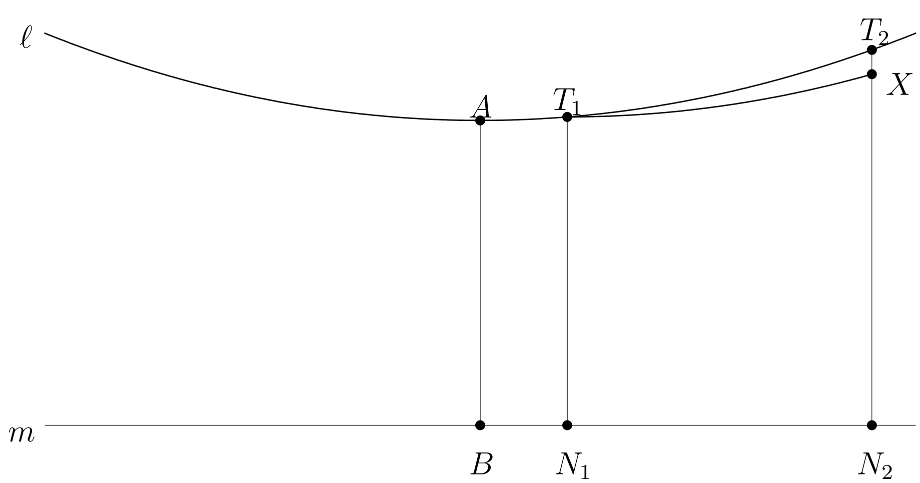


Slika 4.12: Dokaz teorema 4.45.

kojeg zatvara s krakom $\overrightarrow{N_1K'}$ manji od kuta kojeg zatvara s krakom $\overrightarrow{N_1K}$, a taj kut je kut paralelnosti. Zato $\overrightarrow{N_1K'}$ siječe ℓ u nekoj točki X. Sada primijenimo Paschov aksiom (teorem 3.10) na trokut ΔT_1N_1X i pravac $T_1'K'$. Pravac siječe stranicu $\overline{T_1N_1}$ u T_1' i paralelan je s N_1X, pa siječe stranicu $\overline{T_1X}$. Sjecište je tražena točka S_1 iz 3. koraka konstrukcije. $\square$

Neka su ℓ i m ultraparalelni pravci koje zajednička normala siječe u točkama A i B. Neka je $x : \ell \to \mathbb{R}$ koordinatizacija pravca ℓ i $a = x(A)$. Promotrimo svojstva funkcije definirane formulom (4.1).

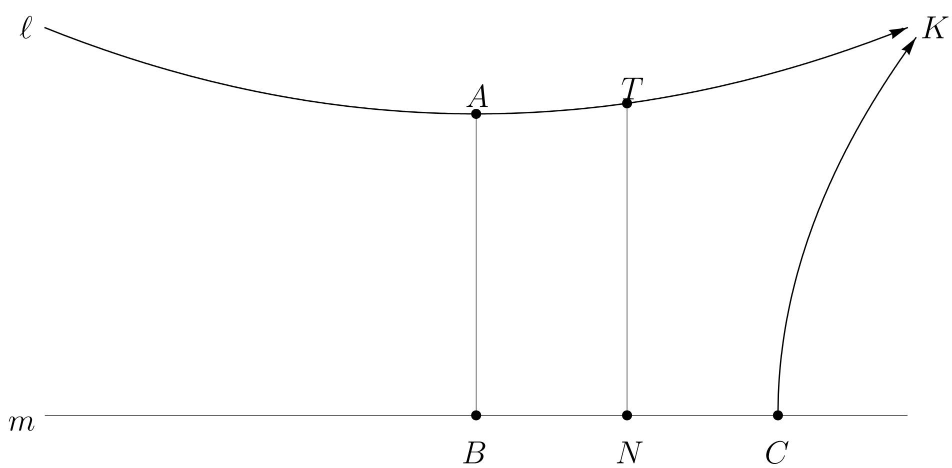
Teorem 4.46. *Za ultraparalelne pravce funkcija* (4.1) *je strogo padajuća na* $\langle -\infty, a\rangle$, *strogo rastuća na* $\langle a, +\infty\rangle$ *i vrijedi* $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.



Slika 4.13: Dokaz teorema 4.46.

Dokaz. Neka su $t_1, t_2 \in \langle a, +\infty\rangle$, $t_1 < t_2$ i $T_1, T_2 \in \ell$ točke takve da je $x(T_1) = t_1$ i $x(T_2) = t_2$. Označimo s N_1 i N_2 odgovarajuća nožišta okomica na pravac m. Onda je $f(t_1) = |T_1N_1|$ i $f(t_2) = |T_2N_2|$. Četverokut ABN_1T_1 je Lambertov, pa po propoziciji 4.15 vrijedi $\measuredangle AT_1N_1 < \frac{\pi}{2}$, odnosno $\measuredangle N_1T_1T_2 > \frac{\pi}{2}$. Neka je $\vec{o}$ polupravac s vrhom T_1 okomit na T_1N_1 koji se nalazi u istoj poluravnini kao točka T_2. Polupravac $\vec{o}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle N_1T_1T_2$. Trokut $\Delta N_1T_1N_2$ ima pravi kut pri vrhu N_1, pa je $\measuredangle N_1T_1N_2 < \frac{\pi}{2}$ i $\vec{o}$ je u unutrašnjosti kuta $\angle N_2T_1T_2$. Po teoremu 3.9 o prečki, $\vec{o}$ siječe $\overline{T_2N_2}$ u nekoj točki X. Sad imamo još jedan Lambertov četverokut $T_1N_1N_2X$ i po propoziciji 4.15 vrijedi $f(t_1) = |T_1N_1| < |XN_2| < |T_2N_2| = f(t_2)$. Dakle, f je strogo rastuća na $\langle a, +\infty\rangle$, a na sličana način vidimo da je strogo padajuća na $\langle -\infty, a\rangle$.

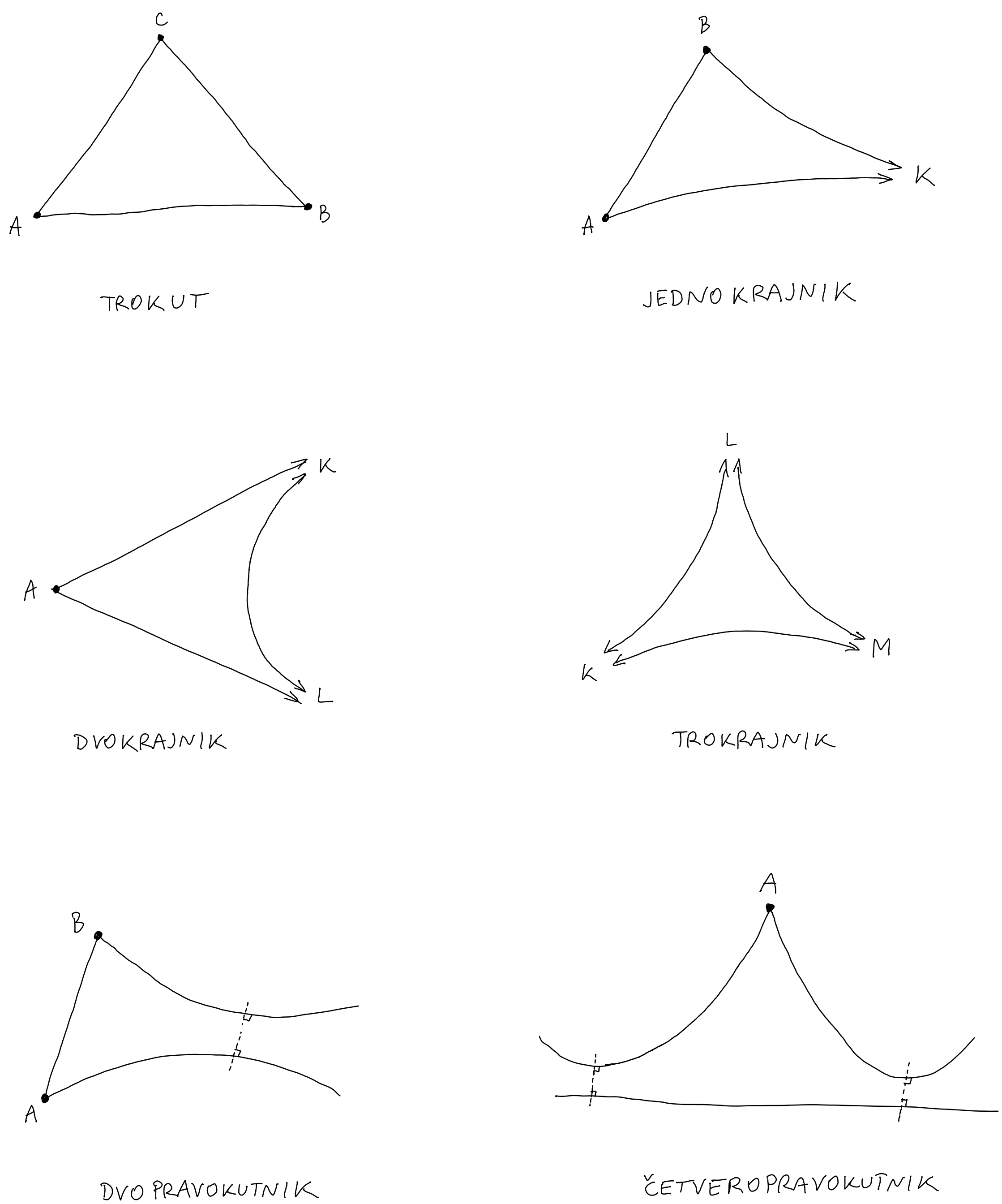
Za limes od $f(t)$ kada $t \to +\infty$, neka je K neprava točka na pravcu ℓ u smjeru koordinatizacije x. Po propoziciji 4.33 spustimo okomicu iz K na m s nožištem C. Neka je $t > a$, $T \in \ell$ točka za koju je $x(T) = t$ i N nožište okomice iz T na m. Tada vrijedi $f(t) = |TN| >$ (propozicija 2.2) $> |TA| - |AN| >$ (teorem 3.19 za ΔANC) $>$ $|TA| - |AC| = t - a - |AC| \to +\infty$ kada $t \to +\infty$. Na sličan način vidimo da $f(t) \to +\infty$ kada $t \to -\infty$. $\square$



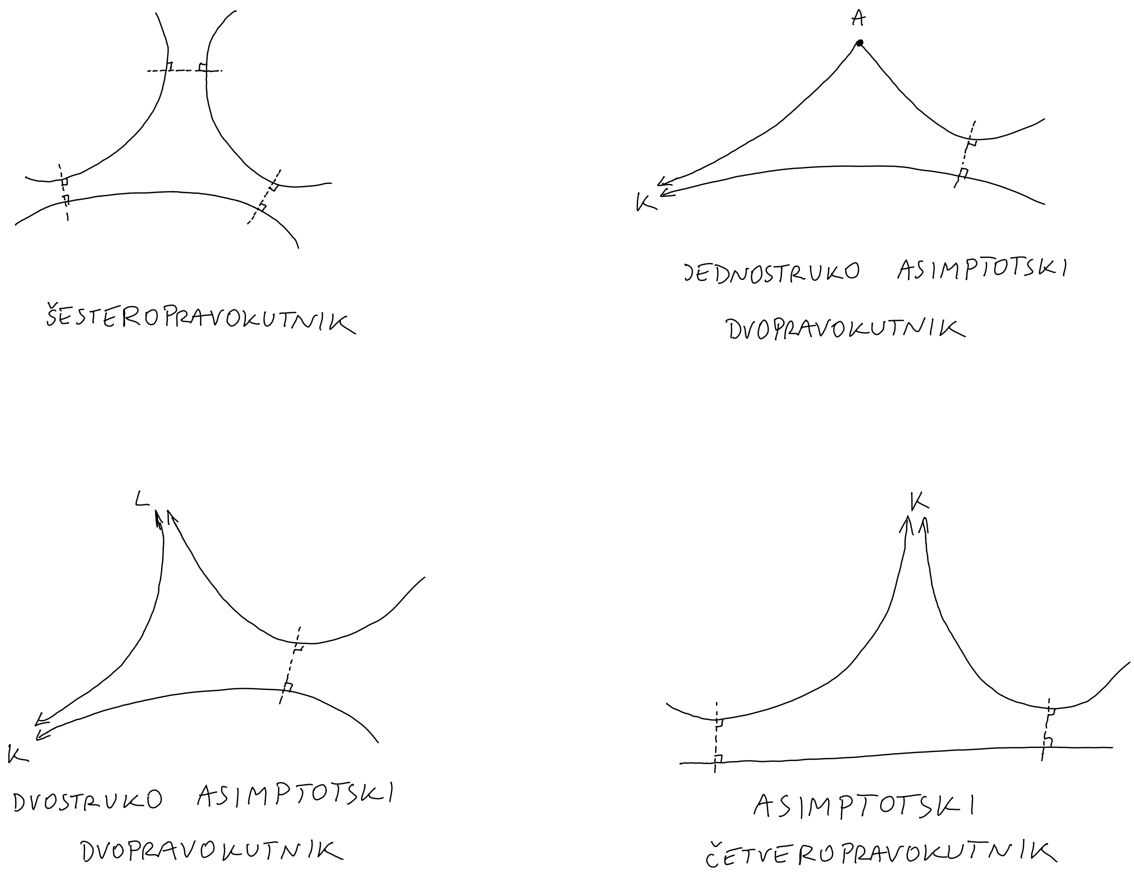
Slika 4.14: Dokaz teorema 4.46 (limesi).

Primijetimo da je ortogonalna projekcija pravca ℓ na ultraparalelni pravac m otvorena dužina. Ortogonalna projekcija pravca ℓ na paralelni pravac m je polupravac. Što je ortogonalna projekcija pravca ℓ na pravac m s kojim se siječe? Koje skupove možemo dobiti u euklidskoj ravnini ortogonalnom projekcijom pravca na pravac?

Upoznali smo tri vrste generaliziranih trokuta u hiperboličnoj ravnini: jednokrajnike, dvokrajnike i trokrajnike. Ako dozvolimo da stranice generaliziranih trokuta budu ultraparalelni pravci, imamo još šest vrsta takvih figura: *dvopravokutnik*, *četveropravokutnik*, *šesteropravokutnik*, *jednostruko asimptotski dvopravokutnik*, *dvostruko asimptotski dvopravokutnik* i *asimptotski četveropravokutnik* (slika 4.15).



Slika 4.15: Vrste generaliziranih trokuta u hiperboličnoj ravnini.



Slika 4.15: Vrste generaliziranih trokuta u hiperboličnoj ravnini (nastavak).

4.7 Površina u hiperboličnoj ravnini

Površina je funkcija koja dijelovima ravnine pridružuje pozitivne realne brojeve koji odgovaraju njihovoj "veličini". Radi jednostavnosti ograničimo se na površinu poligona (trokuta, četverokuta i općenito n-terokuta). Funkcija površine p ima sljedeća svojstva:

1. Sukladni poligoni imaju jednake površine: $P \cong Q \Rightarrow p(P) = p(Q)$.

2. Ako poligon P rastavimo na dva poligona P_1 i P_2 koji se preklapaju samo duž stranica, što zapisujemo $P = P_1 + P_2$, onda vrijedi $p(P) = p(P_1) + p(P_2)$ (aditivnost).

U euklidskoj ravnini polazimo od kvadrata sa stranicom duljine 1, za kojeg se dogovorimo da ima površinu 1. Iz toga i svojstva funkcije površine izvodimo poznate formule za površinu kvadrata, pravokutnika, paralelograma, trokuta i drugih ravninskih likova.

Kvadrat sa stranicom duljine $n \in \mathbb{N}$ možemo podijeliti na n^2 jediničnih kvadrata, pa mu je površina n^2. Ako je duljina stranice razlomak $a = \frac{m}{n}$, složimo n^2 takvih kvadrata u veliki kvadrat sa stranicom duljine m. Površina velikog kvadrata je m^2, a kvadrati od kojih je sastavljen su sukladni i imaju jednake površine. Stoga je površina polaznog kvadrata $\frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2$. Ako je duljina stranice realan broj $a > 0$, aproksimiramo ga nizom pozitivnih racionalnih brojeva $a_n \in \mathbb{Q}$, $a_n \to a$. Površine kvadrata sa stranicama duljine a_n su $P_n = a_n^2$, a taj niz teži prema a^2. Stoga je površina kvadrata $P = a^2$.

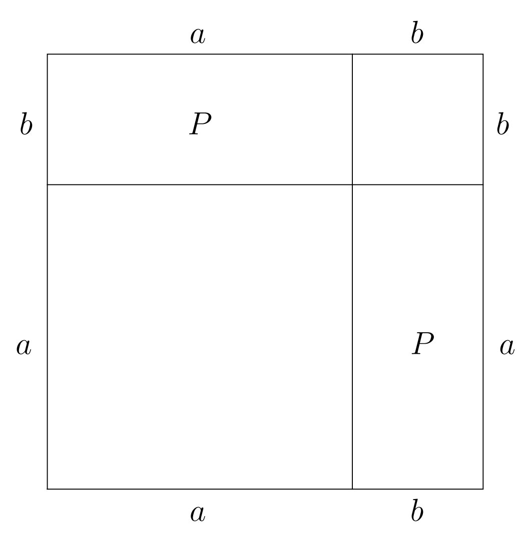
Pravokutnik sa stranicama duljina a i b dopunimo s još jednim takvim pravokutnikom i dva kvadrata sa stranicama a i b do velikog kvadrata sa stranicom duljine $a+b$ (slika 4.16). Površina pravokutnika P zadovoljava $2P + a^2 + b^2 = (a + b)^2$, iz čega slijedi $P = a \cdot b$.

Na stranicu paralelograma duljine a spustimo visinu iz nasuprotnog vrha. Neka je duljina visine v_a. Time smo paralelogram podijelili na crveni trokut i preostali četverokut (slika 4.17). Zeleni trokut na slici sukladan je crvenom, a s preostalim četverokutom čini pravokutnik sa stranicama duljina a i v_a. Površina paralelograma jednaka je površini pravokutnika $P = a \cdot v_a$.

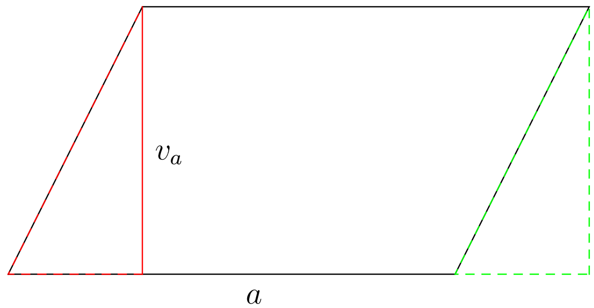
Trokut sa stranicom duljine a i visinom na tu stranicu duljine v_a možemo dopuniti s još jednim sukladnim trokutom do paralelograma (slika 4.18). Dvije površine trokuta čine površinu paralelograma $a \cdot v_a$, pa je površina trokuta $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$. Konačno, poligone s više vrhova možemo dijagonalama podijeliti na trokute. Površinu poligona dobivamo kao zbroj površina trokuta.

U hiperboličnoj ravnini prvi problem je što ne postoje kvadrati i pravokutnici. Kad bismo neki drugi lik proglasili jedinicom površine, npr. jednakostranični trokut sa stranicom duljine 1, drugi problem je što veliki trokuti ne mogu biti istog oblika. Po teoremu 4.18 hiperbolični trokut određen je do na sukladnost mjerama triju kutova. Zato veliki jednakostranični trokut ne možemo popločati malim jednakostraničnim trokutima, kao u euklidskoj ravnini.

S druge strane, defekt trokuta $\delta(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ u hiperboličnoj ravnini ima svojstva 1. i 2. koja zahtijevamo od površine. Sukladni trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ imaju kutove jednakih mjera $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$, pa je $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Propozicija 4.9 je specijalni slučaj aditivnosti. Općenito, defekt n-terokuta $P = A_1 \cdots A_n$ s unutarnjim



Slika 4.16: Površina pravokutnika.



Slika 4.17: Površina paralelograma.

kutovima mjera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ definiramo kao

$$\delta(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

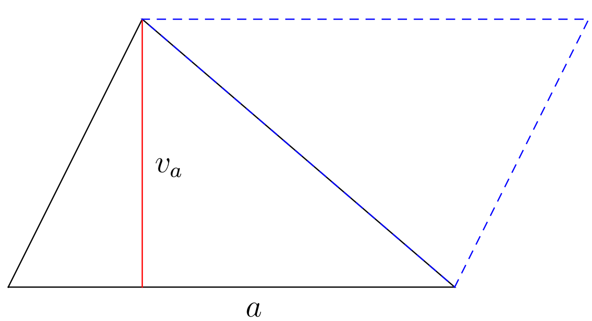
Ta funkcija također ima svojstva površine 1. i 2. Pokazat ćemo da iz toga slijedi proporcionalnost površine i defekta poligona. Izborom jedinične površine možemo postići da konstanta proporcionalnosti bude 1, tj. možemo identificirati površinu i defekt.

Za poligone P i Q kažemo da su *jednakosastavljivi* ako ih možemo rastaviti na manje poligone $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ i $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$ koji se preklapaju samo duž stranica i sukladni su: $P_i \cong Q_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Ekvivalentan pojam dobivamo ako u definiciji zahtijevamo da manji poligoni P_i, Q_i budu trokuti. Jednakosastavljivost je očito refleksivna i simetrična relacija, a može se dokazati i tranzitivnost.

Teorem 4.47. *Jednakosastavljivost je relacija ekvivalencije na skupu svih poligona.*

Iz svojstava 1. i 2. slijedi da jednakosastavljivi poligoni imaju jednaku površinu i defekt.

Propozicija 4.48. *Ako su poligoni P i Q jednakosastavljivi, onda je $p(P) = p(Q)$ i $\delta(P) = \delta(Q)$.*



Slika 4.18: Površina trokuta.

Ključni korak u dokazu proporcijonalnosti površine i defekta je pokazati obrat: ako trokuti P i Q imaju jednake defekte, onda su jednakosastavljivi. Taj rezultat dokazujemo postepeno, od posebnih slučajeva prema općenitijim.

Teorem 4.49. *Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s donjom osnovicom $\overline{AB}$ i neka su A_1 i B_1 točke na pravcu AB takve da je $|A_1B_1| = |AB|$. Onda su četverokuti $ABCD$ i A_1B_1CD jednakosastavljivi.*

Dokaz. □

Teorem 4.50. *Neka je ΔABC trokut, P i Q polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ te A_1 i B_1 ortogonalne projekcije vrhova A i B na pravac PQ. Onda je četverokut A_1B_1BA Saccherijev i jednakosastavljiv je s polaznim trokutom.*

Dokaz. □

Teorem 4.51. *Ako dva trokuta imaju jednake defekte i sukladan jedan par stranica, onda su jednakosastavljivi.*

Dokaz. □

Teorem 4.52. *Ako dva trokuta imaju jednake defekte, onda su jednakosastavljivi.*

Dokaz. □

Posljedica teorema je da trokuti s jednakim defektima imaju jednake površine. Dakle, površinu trokuta ovisi samo o defektu, tj. možemo je identificirati s funkcijom $p : \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}$ takvom da za bilo koji trokut s defektom $\delta(ABC) = x$ vrijedi $p(ABC) = p(x)$.

Propozicija 4.53. *Funkcija $p : \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}$ je aditivna.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in \langle 0, \pi \rangle$ takvi da je $x_1 + x_2 \in \langle 0, \pi \rangle$. Izaberemo trokut ΔABC s defektom $\delta(ABC) = x_1 + x_2$ i podijelimo ga točkom D na stranici $\overline{AB}$ na trokute defekta $\delta(ADC) = x_1$ i $\delta(DBC) = x_2$, kao u propoziciji 4.9. Tada zbog 2. svojstva površine vrijedi $p(x_1 + x_2) = p(ABC) = p(ADC) + p(DBC) = p(x_1) + p(x_2)$. □

Jednadžba $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ koju zadovoljava naša funkcija p je takozvana Cauchyjeva funkcijska jednadžba. Cauchy je pokazao da su jedina neprekidna rješenja linearne funkcije $f(x) = c \cdot x$. Općenito postoje i "patološka rješenja" koja nisu linearne funkcije, ali uz vrlo blage dodatne uvjete linearne funkcije su jedina rješenja. Na primjer, prema teoremu 1 na str. 34 knjige [1] dovoljan dodatni uvjet je da funkcija f poprima nenegativne vrijednosti za male pozitivne vrijednosti varijable, što naša funkcija p zadovoljava. Dakle, postoji konstanta $k > 0$ takva da je $p(x) = k \cdot x$, $\forall x \in \langle 0, \pi \rangle$. Zaključujemo da su površina i defekt trokuta proporcionalni:

$$p(ABC) = p(\delta(ABC)) = k \cdot \delta(ABC).$$

Svaki poligon P možemo rastaviti na trokute $P = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$, pa zbog aditivnosti površine i defekta proporcionalnost vrijedi za sve poligone:

$$p(P) = p(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} p(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{n} k \cdot \delta(\Delta_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \delta(\Delta_i) = k \cdot \delta(\sum_{i=1}^{n} \Delta_i) = k \cdot \delta(P).$$

Kao što smo napomenuli, izborom jedinične površine možemo postići da je konstanta proporcionalnosti $k = 1$, tj. da se porvšina i defekt poligona podudaraju.

Dakle, za svaki trokut ΔABC vrijedi

$$p(ABC) = \delta(ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma < \pi.$$

Površina hiperboličnih trokuta je manja od π, iako im stranice mogu biti po volji velike. Slično, površina hiperboličnih četverokuta je manja od 2π itd. Smisleno je definirati površinu trokrajnika kao π. Za popločati hiperboličnu ravninu trebamo beskonačno mnogo trokrajnika, pa je površina cijele ravnine ipak beskonačna.

Vidjeli smo da je za jednakosastavljivost poligona nužno i dovoljno da imaju jednake defekte. Budući da se površina i defekt podudaraju, ista tvrdnja vrijedi i za površinu.

Teorem 4.54 (F. Bolyai)**.** *Poligoni su jednakosastavljivi ako i samo ako imaju jednaku površinu.*

Ovaj teorem vrijedi u hiperboličkoj i u euklidskoj ravnini, a dokazao ga je Farkas Bolyai, otac Jánosa Bolyaia. Dokaz se nalazi u knjizi [17] na str. 275-279. Zanimljivo je da u trodimenzionalnom prostoru ne vrijedi analogni teorem, što je bio jedan od Hilbertovih velikih matematičkih problema na početku 20. stoljeća. Max Dehn je dokazao da je jednakost volumena samo nuždan, ali ne i dovoljan uvjet za jednakosastavljivosti poliedara. Više o tome možete pročitati u knjizi [18] na str. 277-287.

Zadaci

Zadatak 4.1. *Dokažite da je relacija "biti disjunktan" relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca euklidske ravnine. Primjerom pokažite da nije relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca hiperbolične ravnine.*

Zadatak 4.2. *Neka je ΔABC trokut u hiperboličnoj ravnini i P, Q, R redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Dokažite da je simetrala stranice $\overline{BC}$ ujedno zajednička normala pravaca QR i BC (dakle, ta dva pravca su ultraparalelna). Je li duljina srednjice $|QR|$ veća, manja ili jednaka $\frac{1}{2}|BC|$?*

Zadatak 4.3. *Neka su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ dva Lambertova četverokuta s mjerama oštrog kuta δ i δ'. Dokažite: ako je $\delta = \delta'$ i $|AB| = |A'B'|$, onda su ta dva četverokuta sukladna.*

Zadatak 4.4. *Dokažite da osnovice Saccherijeva četverokuta leže na ultraparalelnim pravcima. Na kakvim pravcima leže njegovi krakovi?*

Zadatak 4.5. Pseudopravokutnik *je četverokut u hiperboličnoj ravnini kojem su sva četiri kuta sukladna. Dokažite da su nasuprotne stranice pseudopravokutnika sukladne i da leže na ultraparalelnim pravcima.*

Zadatak 4.6. Romb *je četverokut kojem su sve četiri stranice sukladne. Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je romb ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju i sijeku pod pravim kutom. Na kakvim pravcima leže nasuprotne stranice romba u hiperboličnoj ravnini: paralelnim, ultraparalelnim ili pravcima koji se sijeku?*

Zadatak 4.7. *Četverokut kojem su nasuprotne stranice sukladne nazivamo* paralelogramom. *Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.*

Zadatak 4.8. *Bez korištenja aksioma o paralelama dokažite: četverokut je paralelogram ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi sukladni.*

Zadatak 4.9. *Dokažite da su pravokutnici u euklidskoj ravnini paralelogrami. Jesu li Lambertovi i Saccherijevi četverokuti u hiperboličnoj ravnini paralelogrami? Dokažite da u hiperboličnoj ravnini postoje paralelogrami.*

Zadatak 4.10. ***(a)*** *Dokažite da u hiperboličnoj ravnini nasuprotne stranice paralelograma leže na ultraparalelnim pravcima.*

(b) *Dokažite da za svaka dva ultraparalelna pravca i za svaki $a > 0$ postoji paralelogram sa stranicama duljine a na ta dva pravca. Je li time jednoznačno određena duljina drugog para nasuprotnih stranica?*

(c) *Mogu li oba para nasuprotnih stranica četverokuta ležati na ultraparalelnim pravcima, a da taj četverokut ne bude paralelogram?*

Zadatak 4.11. *Dokažite da su formule* $\operatorname{ctg}\Pi(x) = \operatorname{sh} x$, $\cos\Pi(x) = \operatorname{th} x$, $\sin\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ *i* $\Pi(x) = 2\operatorname{arctg}(e^{-x})$ *ekvivalentne.*

Zadatak 4.12. *Definirajte sukladnost dvokrajnika i sukladnost trokrajnika. Iskažite i dokažite kriterije sukladnosti za dvokrajnike i trokrajnike.*

Zadatak 4.13. *Izvedite formulu za površinu hiperboličnog pravokutnog trokuta s katetama duljine a i b.*

Rješenja nekih zadataka

Zadatak 1.12. Za svjetlosne vektore $x = (1, 0, 1)$ i $y = (0, 1, 1)$ je $\|x+y\| = \|(1, 1, 2)\| = \sqrt{2} > 0 = \|x\| + \|y\|$.

Zadatak 1.18. Tvrdnje (a) i (b) nisu istinite. Na primjer, $x = (2, 0, 1)$ i $y = (-2, 0, 1)$ su prostorni vektori, ali $x + y = (0, 0, 2)$ je vremenski. Tvrdnja (c) je istinita. Ako su $x, y \in \mathbb{R}^3$ prostorni vektori takvi da je $b(x, y) = 0$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je $b(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y) = \alpha^2 b(x, x) + \beta^2 b(y, y)$ pozitivan i $\alpha x + \beta y$ je prostorni, osim ako je $\alpha = \beta = 0$, a tada je $\alpha x+\beta y = 0$. Tvrdnja (d) ne vrijedi, na primjer $x = (1, 0, 2)$ i $y = (1, 0, -2)$ su vremenski, ali $x + y = (2, 0, 0)$ je prostorni. Tvrdnja (e) vrijedi i slijedi iz korolara 1.19 i leme 1.20.

Zadatak 1.19. $n = \sqrt{10}\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$.

Zadatak 1.20. $P = \left(1, 1, \sqrt{3}\right)$.

Zadatak 1.22. $O = (\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{4})$.

Zadatak 1.23. $n = \sqrt{15}\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right)$.

Zadatak 1.31. Okomica kroz P na ℓ ima pol proporcionalan s $m = P \times n$. Nožište je sjecište okomice s pravcem ℓ. To je točka iz H^2 proporcionalna s $m \times n$:

$$N = \frac{\pm(P \times n) \times n}{\sqrt{1 + b(P, n)^2}}.$$

Udaljenost točke od pravca je $d(P, \ell) = d(P, N) = \operatorname{arch}\sqrt{1 + b(P, n)^2}$.

Zadatak 1.37. $\measuredangle(\vec{h}, \vec{k}) = \frac{\pi}{3}$. Vektor smjera simetrale je $w = (3\sqrt{3}, \frac{23}{2\sqrt{3}}, \frac{29}{2\sqrt{3}})$.

Zadatak 1.40. $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \operatorname{arch}\left(\dfrac{1 - x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}\right)$, $\measuredangle(p, q) = \arccos(\pm(n_1m_1 + n_2m_2 - n_3m_3))$.

Zadatak 2.3. Relacija $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ na skupu $\{1, 2\}$ je refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična.

Zadatak 2.6. Za tri točke A, B, C kažemo da je B između A i C i pišemo $A * B * C$ ako su te tri točke kolinearne te za neku koordinatizaciju x pravca na kojem leže i $a = x(A)$, $b = x(B)$, $c = x(C)$ vrijedi $a < b < c$ ili $a > b > c$. ...

Zadatak 4.13. $P = \arcsin\left(\frac{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b}{1 + \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b}\right)$.

Bibliografija

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press, 1966.

[2] G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*, Ann. of Math. (2) **33** (1932), no. 2, 329-345.

[3] G. D. Birkhoff, R. Beatley, *Basic geometry*, 3rd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[4] J. Casey, *The first six books of the Elements of Euclid*, Hodges, Figgis, & Co., Dublin, 1885. `https://gutenberg.org/ebooks/21076`

[5] B. Casselman, *Euclid's Elements of Geometry*. `https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/`

[6] Clay Mathematics Institute Historical Archive, *The thirteen books of Euclid's Elements*. `https://www.claymath.org/library/historical/euclid/`

[7] T. Dray, *The geometry of special relativity*, CRC Press, 2012.

[8] Euklid, *Elementi I-VI*, KruZak, Zagreb, 1999.

[9] M. J. Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean geometries. Development and history*, W. H. Freeman and Company, 1994.

[10] M. Harvey, *Geometry illuminated. An illustrated introduction to Euclidean and hyperbolic plane geometry*, MAA Press, 2015.

[11] T. L. Heath, *Euclid, Elements*, Perseus Digital Library. `http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0086`

[12] D. Hilbert, *The foundations of geometry*, 1902. `https://gutenberg.org/ebooks/17384`

[13] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2007. `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf`

[14] D. E. Joyce, *Euclid's Elements*, 1998. `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/`

[15] I. Kavčić, V. Krčadinac, *Sferna i hiperbolička trigonometrija*, Matematičko-fizički list LXIX/1 **273** (2018/19), 17–25. `https://hrcak.srce.hr/file/323072`

[16] M. Pasch, M. Dehn, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Springer Verlag, Berlin, 1926.

[17] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[18] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[19] B. Russell, *The Teaching of Euclid*, The Mathematical Gazette **2** (1902), No. 33, 165–167.

[20] A. Ramsay, R. D. Richtmyer, *Introduction to hyperbolic geometry*, Springer, 1995.

[21] P. J. Ryan, *Euclidean and non-Euclidean geometry: An analytic approach*, Cambridge University Press, 1986.