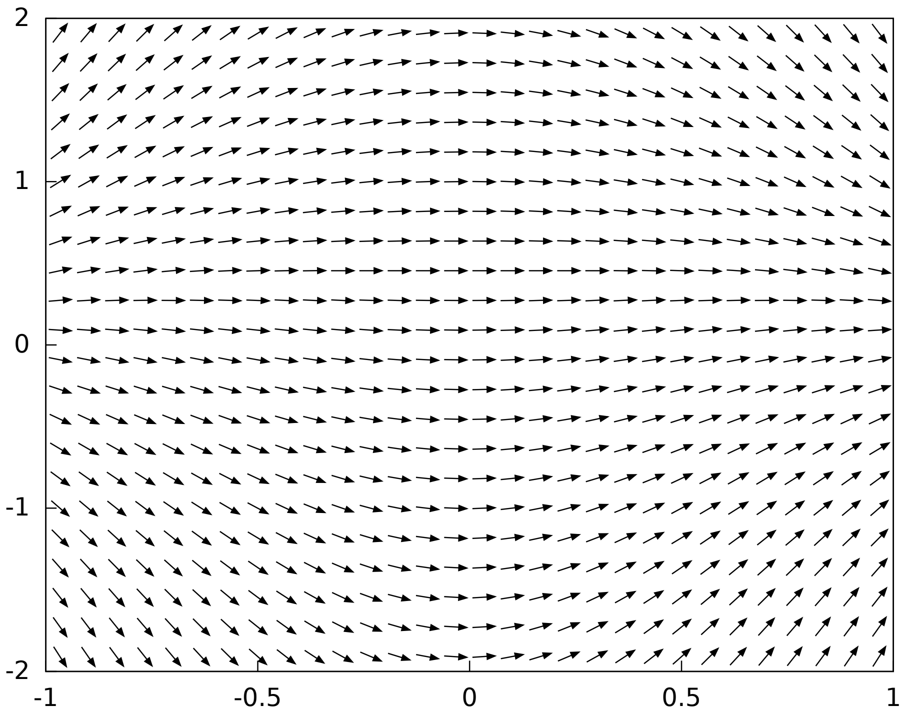
1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ____________________

Drugi kolokvij, 14.6.2023.

1. Definirajte pojam rješenja opće diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = R(x, y)$. Što je diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama? Objasnite kako rješavamo takve jednadžbe.

2. Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + 2x \cdot y = \sin(x) \cdot e^{-x^2}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = -1$. Skicirajte graf tog rješenja u zadanom polju smjerova:



3. Zapišite opći sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica i definirajte što je njegovo rješenje. Zapišite proširenu matricu pridruženu tom sustavu. Opišite dozvoljene operacije u Gaussovoj metodi eliminacija (elementarne transformacije). Dolje su navedene završne matrice u Gaussovoj metodi eliminacija za tri sustava linearnih jednadžbi. Koliko nepoznanica, jednadžbi i rješenja imaju ta tri sustava? Zapišite im skup svih rješenja, ako je neprazan.

(a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. Pod kojim uvjetom možemo množiti dvije matrice? Definirajte produkt takvih matrica i navedite svojstva operacije množenja matrica. Navedite primjer 2×2 matrica takvih da je $A \cdot B \neq B \cdot A$ i primjer matrice $A \neq 0$ koja nema multiplikativni inverz.

5. Definirajte linearnu nezavisnost skupa vektora. Provjerite je li $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linearno nezavisan skup za $a_1 = (1, 3, -2, 1)$, $a_2 = (1, 4, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 5, 3, -3)$, $a_4 = (1, -4, -2, 3)$. Koja je dimenzija linearne ljuske $[\{a_1, a_2, a_3, a_4\}]$?

6. Populacija koja je podijeljena u dvije dobne skupine opisana je Lesliejevom matricom $L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0 \end{bmatrix}$. Koji je prosječan broj potomaka u prvoj i u drugoj dobnoj skupini? Kolika je vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu skupinu? Ako se početna populacija sastoji od 1000 jedinki iz prve skupine i 0 jedinki iz druge skupine, izračunajte brojnost dobnih skupina nakon godinu dana i nakon dvije godine.

7. Izračunajte svojstvene vrijednosti matrice L iz prethodnog zadatka. Dugoročno gledano, povećava li se ili se smanjuje ukupna veličina populacije? Objasnite kako se to vidi iz svojstvenih vrijednosti. Odredite stablinu starosnu distribuciju te populacije.

Napomena. Svaki zadatak vrijedi 5 bodova. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x + C \right)$$

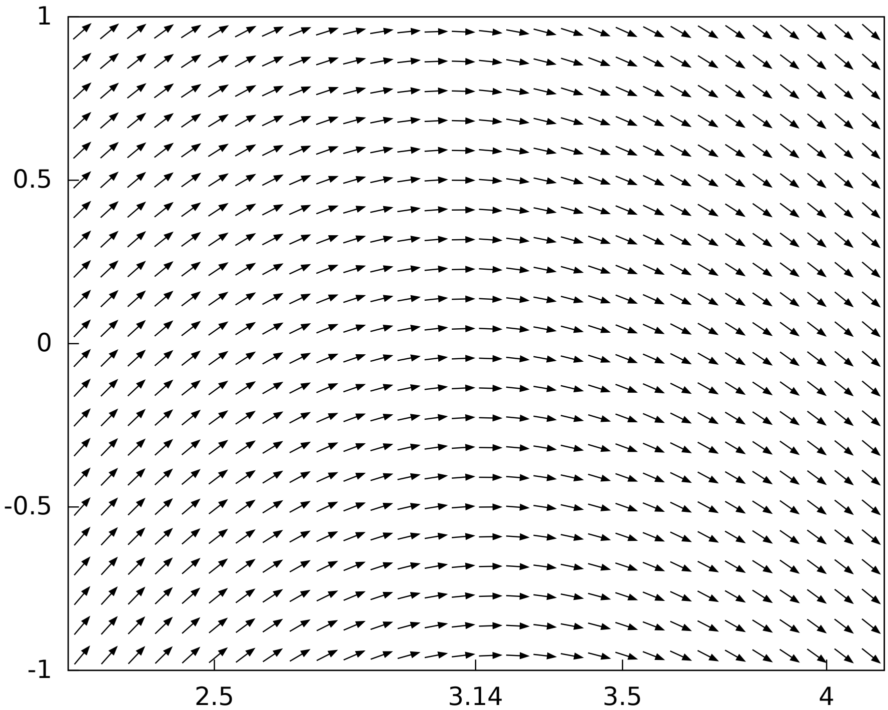
1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Drugi kolokvij, 14.6.2023.

1. Definirajte pojam rješenja opće diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = R(x, y)$. Što je diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama? Objasnite kako rješavamo takve jednadžbe.

2. Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' + \frac{1}{x^2} \cdot y = \sin(x) \cdot e^{1/x}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(\pi) = 0$. Skicirajte graf tog rješenja u zadanom polju smjerova:



3. Zapišite opći sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica i definirajte što je njegovo rješenje. Zapišite proširenu matricu pridruženu tom sustavu. Opišite dozvoljene operacije u Gaussovoj metodi eliminacija (elementarne transformacije). Dolje su navedene završne matrice u Gaussovoj metodi eliminacija za tri sustava linearnih jednadžbi. Koliko nepoznanica, jednadžbi i rješenja imaju ta tri sustava? Zapišite im skup svih rješenja, ako je neprazan.

(a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (c) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. Pod kojim uvjetom možemo množiti dvije matrice? Definirajte produkt takvih matrica i navedite svojstva operacije množenja matrica. Navedite primjer 2×2 matrica takvih da je $A \cdot B \neq B \cdot A$ i primjer matrice $A \neq 0$ koja nema multiplikativni inverz.

5. Definirajte linearnu nezavisnost skupa vektora. Provjerite je li $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subseteq \mathbb{R}^4$ linearno nezavisan skup za $a_1 = (1, 2, 2, -2)$, $a_2 = (1, -1, 0, -1)$, $a_3 = (1, 5, 4, -3)$, $a_4 = (2, 1, 2, -3)$. Koja je dimenzija linearne ljuske $[\{a_1, a_2, a_3, a_4\}]$?

6. Populacija koja je podijeljena u dvije dobne skupine opisana je Lesliejevom matricom $L = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix}$. Koji je prosječan broj potomaka u prvoj i u drugoj dobnoj skupini? Kolika je vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu skupinu? Ako se početna populacija sastoji od 0 jedinki iz prve skupine i 1000 jedinki iz druge skupine, izračunajte brojnost dobnih skupina nakon godinu dana i nakon dvije godine.

7. Izračunajte svojstvene vrijednosti matrice L iz prethodnog zadatka. Dugoročno gledano, povećava li se ili se smanjuje ukupna veličina populacije? Objasnite kako se to vidi iz svojstvenih vrijednosti. Odredite stablinu starosnu distribuciju te populacije.

Napomena. Svaki zadatak vrijedi 5 bodova. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\, x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x + C \right)$$