

1	2	3	4	5	6	Σ

Ime i prezime: _____

Prvi kolokvij, 26.4.2023.

1. **(6 bodova)** Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Precizno definirajte što znači da je taj niz **(a)** omeđen, **(b)** padajući, **(c)** konvergentan. Navedite primjer niza koji ima svojstvo (a), a nema svojstva (b) i (c). Je li moguće da niz ima svojstva (a) i (b), a nema svojstvo (c)? Obrazložite svoj odgovor!

2. **(6 bodova)** Izračunajte limese

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2 + 1)}{n^2 + 1}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{x}.$$

3. **(6 bodova)** Precizno definirajte derivaciju funkcije. Za funkciju

$$f(x) = \arcsin((1 + x)^2)$$

(a) odredite prirodnu domenu, **(b)** izračunajte derivaciju, **(c)** nađite jednadžbu tangente u točki $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$. Nemojte računati s približnim brojevima, nego koristite $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

4. **(6 bodova)** Napišite i dokažite Rolleov teorem srednje vrijednosti. Precizno iskažite teoreme na koje se pozivate u dokazu.

5. **(6 bodova)** Veličina populacije bakterija opisana je Gompertzovom funkcijom $f(t) = 3e^{-e^{6-2t}}$ (u milijunima bakterija), pri čemu varijabla $t \geq 0$ predstavlja vrijeme u satima. **(a)** Pokažite da populacija nikada ne prestaje rasti. **(b)** Može li populacija narasti proizvoljno velika, ili će se njezina veličina stabilizirati na nekoj vrijednosti (i na kojoj)? **(c)** Nakon koliko sati populacija prelazi iz ubrzanog rasta u usporeni rast?

6. **(5 bodova)** Izračunajte integrale

$$(a) \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}, \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula na stražnjoj strani papira.

1	2	3	4	5	6	Σ

Ime i prezime: _____

Prvi kolokvij, 26.4.2023.

1. **(6 bodova)** Neka je (x_n) niz realnih brojeva. Precizno definirajte što znači **(a)** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 7$, **(b)** niz (x_n) je rastući, **(c)** niz (x_n) je omeđen. Navedite primjer niza koji ima svojstvo (a), a nema jedno od svojstava (b) ili (c). Je li moguće da niz ima svojstvo (a), a nema oba svojstva (b) i (c)? Obrazložite svoj odgovor!

2. **(6 bodova)** Izračunajte limese

$$\text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n^2 + 1) \sin \frac{1}{n^2 + 1} \right), \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{1 - \cos x}}{x}.$$

3. **(6 bodova)** Precizno definirajte derivaciju funkcije. Za funkciju

$$f(x) = \arccos(x^2 - 1)$$

(a) odredite prirodnu domenu, **(b)** izračunajte derivaciju, **(c)** nađite jednadžbu tangente u točki $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Nemojte računati s približnim brojevima, nego koristite $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

4. **(6 bodova)** Napišite i dokažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Precizno iskažite teoreme na koje se pozivate u dokazu.

5. **(6 bodova)** Veličina populacije bakterija opisana je Gompertzovom funkcijom $f(t) = 5e^{-e^{4-2t}}$ (u milijunima bakterija), pri čemu varijabla $t \geq 0$ predstavlja vrijeme u satima. **(a)** Pokažite da populacija nikada ne prestaje rasti. **(b)** Može li populacija narasti proizvoljno velika, ili će se njezina veličina stabilizirati na nekoj vrijednosti (i na kojoj)? **(c)** Nakon koliko sati populacija prelazi iz ubrzanog rasta u usporeni rast?

6. **(5 bodova)** Izračunajte integrale

$$\text{(a)} \quad \int \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)}, \quad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula na stražnjoj strani papira.

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x)) dx = C \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array} \right] =$$

$$= \int f(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$