Domaća zadaća 9

1. Provjerite koji su od sljedećih skupova vektora potprostori odgovarajućeg vektorskog prostora.

   (a) $U \subseteq \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4 \text{ i } x_2 = -x_3\}$

   (b) $V \subseteq \mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \leq 10x_3\}$

   (c) $\mathcal{S} \subseteq M_2$, $\mathcal{S} = \{A \in M_2 \mid \det A = 0\}$ (skup svih singularnih 2×2 matrica)

   (d) $\mathcal{A} \subseteq M_n$, $\mathcal{A} = \{A \in M_n \mid A^\tau = -A\}$ (skup svih antisimetričnih $n \times n$ matrica)

   (e) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_2$, $\mathcal{D} = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(x) = ax^2 + bx + c,\ b^2 - 4ac < 0\}$
   (skup svih polinoma stupnja najviše 2 s negativnom diskriminantom)

   (f) $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}_n$, $\mathcal{N} = \{p \in \mathcal{P}_n \mid p(-x) = -p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
   (skup svih polinoma stupnja najviše n koji su neparne funkcije)

2. Provjerite koji su od sljedećih skupova vektora linearno nezavisni. Koji su od tih skupova baze odgovarajućeg vektorskog prostora?

   (a) $\{a_1, a_2\} \subseteq \mathbb{R}^4$, $a_1 = (1, -1, 0, 3)$, $a_2 = (2, 0, 1, 4)$

   (b) $\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $b_1 = (1, 2, 3)$, $b_2 = (2, 3, 4)$, $b_3 = (4, 5, 6)$

   (c) $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} \subseteq \mathcal{P}_2$, $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$, $p_3(x) = x^2 + x$

   (d) $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\} \subseteq \mathcal{P}_3$, $q_1(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$, $q_2(x) = 3x^2 - x + 2$, $q_3(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$.

   (e) $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subseteq M_2$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (f) $\{B_1, B_2, B_3, B_4\} \subseteq M_2$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. U vektorskom prostoru $V = \mathbb{R}^4$ zadani su vektori $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 2, 3, 4)$ i $a_3 = (1, 0, 0, 1)$. Dokažite da vektor $b = (1, 1, 9, 1)$ pripada potprostoru W razapetom s $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nađite jedan vektor iz V koji ne pripada potprostoru W.

4. Neka je $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor polinoma stupnja najviše 3. Dokažite da je skup polinoma $\mathcal{W} = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid p'(1) = 0\}$ potprostor od $\mathcal{P}_3$, odredite mu bazu i dimenziju. Koja je dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$?

5. Neka je M_2 vektorski prostor 2×2 matrica. Dokažite da je skup matrica

$$\mathcal{W} = \left\{ A \in M_2 \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   potprostor od M_2, odredite mu bazu i dimenziju. Koja je dimenzija vektorskog prostora M_2?

Rješenja

1. (a) Skup U je potprostor.
   (b) Skup V nije potprostor: $x = (1, 1, 1) \in V$, ali $-x = (-1, -1, -1) \notin V$.
   (c) Skup $\mathcal{S}$ nije potprostor: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ su singularne, ali $A + B = I$ nije singularna.
   (d) Skup $\mathcal{A}$ je potprostor.
   (e) Skup $\mathcal{D}$ nije potprostor: ne sadrži nulvektor, tj. nulpolinom $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
   (f) Skup $\mathcal{N}$ je potprostor.

2. (a) Skup $\{a_1, a_2\}$ je linearno nezavisan, ali nije baza jer sadrži samo dva vektora, a $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.
   (b) Skup $\{b_1, b_2, b_3\}$ je linearno zavisan: $2b_1 - 3b_2 + b_3 = 0$.
   (c) Skup $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ je linearno nezavisan i baza je od $\mathcal{P}_2$.
   (d) Skup $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$ je linearno zavisan: $2q_1(x) + q_2(x) - q_3(x) = 0$.
   (e) Skup $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ je linearno nezavisan i baza je od M_2.
   (f) Skup $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ je linearno zavisan: $3B_1 - 2B_2 - 4B_3 + 3B_4 = 0$.

3. $b = 3a_1 + 2a_2 - 4a_3$. Npr. vektor $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ ne pripada potprostoru W.

4. Ako je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, uvjet $p'(1) = 0$ ekvivalentan je s $3a + 2b + c = 0$. Iz toga možemo izraziti koeficijent c kao $c = -3a - 2b$, pri čemu su koeficijenti $a, b, d \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dakle, $\mathcal{W}$ je skup svih polinoma oblika $p(x) = ax^3 + bx^2 - (3a + 2b)x + d = a(x^3 - 3x) + b(x^2 - 2x) + d$. Vidimo da je $\{x^3 - 3x, x^2 - 2x, 1\}$ baza od $\mathcal{W}$ i $\dim \mathcal{W} = 3$, a $\dim \mathcal{P}_3 = 4$.

5. Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, uvjet $A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ekvivalentan je s $a + b = 0$, $c + d = 0$. Iz toga možemo izraziti $b = -a$, $d = -c$, pri čemu su koeficijenti $a, c \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dakle, $\mathcal{W}$ je skup svih matrica oblika $\begin{bmatrix} a & -a \\ c & -c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vidimo da je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ baza od $\mathcal{W}$ i $\dim \mathcal{W} = 2$, a $\dim M_2 = 4$.