

## Domaća zadaća 8

Izračunajte:

$$1. \quad [1 \quad 0 \quad -3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \begin{bmatrix} -1 & -8 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad \text{Neka je } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}. \text{ Izračunajte, ako}$$

ima smisla: **(a)**  $A \cdot B + 2C$ , **(b)**  $A \cdot B^T + 2C$ , **(c)**  $A \cdot C + 2B$ , **(d)**  $C \cdot A + 2B$ .

6. U nekoj populaciji reprodukcija ženskih jedinki opisana je Lesliejevom matricom

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Interpretirajte ovaj model! Ako je  $N_0(0) = 100$ ,  $N_1(0) = 0$  i  $N_2(0) = 0$ , odredite  $N(t)$  za  $t = 1, 2, 3, 4$ .

7. Zamišljena populacija kukaca sastoji se od tri dobne skupine. Polovica ženki preživljava iz prve u drugu godinu, a trećina ženki preživljava iz druge u treću godinu. Ženke se treće godine razmnožavaju i u prosjeku imaju šest ženskih potomaka. Nakon razmnožavanja ženke umiru. Postavite Lesliejevu matricu i proučite kretanje populacije koja počinje sa 60 ženki u svakoj dobnoj skupini.

Gaussovom metodom eliminacija odredite inverzne matrice, ako postoje. Rezultate provjerite množenjem:

$$8. A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$9. B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$10. C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

11. Za koje  $x \in \mathbb{R}$  je matrica  $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$  regularna? Za sve takve  $x$  izračunajte  $A^{-1}$ .

12. Populacija kukaca koji žive najduže 3 godine opisana je matricama

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad N(t) = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Objasnite smisao brojeva u Lesliejevoj matrici  $L$ . Izračunajte matrice  $N(t+1)$ ,  $N(t+2)$  koje opisuju populaciju iduće dvije godine i matrice  $N(t-1)$ ,  $N(t-2)$  koje opisuju populaciju prethodne dvije godine. Što zaključujete o lanjskoj starosnoj distribuciji  $N(t-1)$ ?

## Rješenja

$$1. \quad [-11] \quad 2. \quad \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 5 & 60 \end{bmatrix} \quad 3. \quad \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -28 \end{bmatrix} \quad 4. \quad \begin{bmatrix} -4 & 6 & -25 \\ -11 & -10 & -13 \\ 11 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad \text{(a) Nema smisla.} \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 18 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(c) Nema smisla.} \quad \text{(d) } \begin{bmatrix} 22 & 3 & 10 \\ 29 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

6. Ženke iz prve i treće dobne skupine nemaju potomaka, a ženke iz druge dobne skupine u prosjeku imaju 5 ženskih potomaka. Vjerojatnost preživljavanja od prve do druge dobne skupine je 80%, a od druge do treće je 60%.

$$N(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N(2) = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}, \quad N(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N(4) = \begin{bmatrix} 1600 \\ 0 \\ 192 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \quad N(0) = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad N(1) = \begin{bmatrix} 360 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad N(2) = \begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$N(3) = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}. \quad \text{Dinamika populacije ponavlja se u ciklusima od 3 godine.}$$

$$8. \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$9. \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -21 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

10. Matrica  $C$  je singularna.

11. Matrica  $M$  je regularna za sve  $x \neq 6$  i vrijedi  $M^{-1} = \frac{1}{x-6} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{x}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$ .

$$12. \quad N(t+1) = L \cdot N(t) = \begin{bmatrix} 70 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad N(t+2) = L \cdot N(t+1) = \begin{bmatrix} 75 \\ 35 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad N(t-1) = L^{-1} \cdot N(t) = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad N(t-2) = L^{-1} \cdot N(t-1) =$$

$\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -20 \end{bmatrix}$ . Zbog negativne komponente u  $N(t-2)$  zaključujemo da populacija s distribucijom  $N(t-1)$  nije mogla nastati na način određen Lesliejevom matricom.