Domaća zadaća 5

1. Andrewsova funkcija $\mu(s) = \dfrac{s}{2+s+s^2/8}$ predstavlja stopu rasta biomase u ovisnosti o koncentraciji hranjivih tvari $s \geq 0$. Odredite područja rasta i pada, područja konveksnosti i konkavnosti, točke ekstrema i točke infleksije ove funkcije na domeni $[0, +\infty\rangle$. Opišite razliku funkcije $\mu(s)$ i Monodove funkcije (slika 3.13 u skripti na str. 73).

2. Veza vjerojatnosti rekombinacije r između dva mjesta na lancu DNK i genske udaljenosti d ta dva mjesta opisana je Haldaneovom funkcijom $r(d) = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-d/50})$. Odredite inverznu funkciju od $r(d)$, tj. izrazite d kao funkciju od r. Odredite prirodne domene funkcija $r(d)$ i $d(r)$. Je li funkcija $r(d)$ rastuća/padajuća, konveksna/konkavna i ima li horizontalne/vertikalne asimptote? Svoje tvrdnje obrazložite računanjem derivacija i limesa! Skicirajte graf funkcije $r(d)$.

3. Morgan–Mercer–Flodinova funkcija zadana je formulom $f(s) = \frac{as^b}{1+s^b}$, pri čemu su $a > 0$ i $b > 1$ konstante. Vrijednost $f(s)$ predstavlja zasićenost organizma određenim nutrijentom u ovisnosti o koncentraciji $s \geq 0$ tog nutrijenta u hrani (domena je $[0, +\infty\rangle$). Dokažite da je Morgan–Mercer–Flodinova funkcija strogo rastuća, izračunajte $f(0)$ i $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s)$ te odredite područja konveksnosti, konkavnosti i točku infleksije.

4. Izračunajte neodređene integrale

   (a) $\displaystyle\int (4x^3 - 2x^2 + x + 7)\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int (3e^x + \frac{x^7}{5} - 2\sqrt[3]{x^2} + \sin x - \frac{1}{x} + 1)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(4x+7)}$ **(d)** $\displaystyle\int x \cdot 7^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{a^x}{1+a^{2x}}\,\mathrm{d}x$ **(f)** $\displaystyle\int x\,e^x \mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ **(h)** $\displaystyle\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$ **(i)** $\displaystyle\int \ln\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

5. Izračunajte određene integrale

   (a) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 3x - 2)\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25+3x}}$ **(e)** $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$ **(f)** $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{2x}\mathrm{d}x$ **(g)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

6. Izračunajte površinu omeđenu krivuljom $y = \mathrm{tg}\,x$, osi apscisom i pravcem $x = \dfrac{\pi}{3}$.

7. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i pravcem $x = 1$.

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Rješenja

1. Funkcija $\mu(s)$ raste na $\langle 0, 4\rangle$ i pada na $\langle 4, +\infty\rangle$, a u točki $s = 4$ poprima globalni maksimum. To znači da koncentracije hranjivih tvari veće od $s = 4$ smanjuju stopu rasta biomase, tj. štetne su za organizam na koji se odnosi funkcija. Za razliku od toga Monodova funkcija se asimptotski približava maksimalnoj stopi rasta, tj. velike koncentracije hranjivih tvari nisu štetne za organizam. Funkcija $\mu(s)$ poprima globalni minimum za $s = 0$, jer vrijedi $\mu(0) = 0$ i $\mu(s) > 0$ za $s > 0$. Funkcija je konkavna na $\langle 0, 8\rangle$ i konveksna na $\langle 8, +\infty\rangle$, a $s = 8$ je točka infleksije.

2. $d(r) = -50\ln(1 - 2r)$. Prirodna domena funkcije $r(d)$ je $\mathbb{R}$, a funkcije $d(r)$ je $\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$. Budući da udaljenost i vjerojatnost ne mogu biti negativne, uzimamo $[0, +\infty\rangle$ i $[0, \frac{1}{2}\rangle$. Funkcija $r(d)$ je rastuća i konkavna, zbog $r'(d) > 0$ i $r''(d) < 0$. Graf ima horizontalnu asimptotu $y = \frac{1}{2}$ zbog $\lim\limits_{t\to+\infty} r(d) = \frac{1}{2}$.

3. Funkcija je strogo rastuća jer je $f'(s) = ab \cdot \frac{s^{b-1}}{(1+s^b)^2} > 0$ za sve $s > 0$. Vrijedi $f(0) = 0$ i $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s) = a$. Druga derivacija $f''(s) = ab \cdot s^{b-2} \cdot \frac{b-1-(b+1)s^b}{(1+s^b)^3}$ poprima vrijednost nula za $s_0 = \left(\frac{b-1}{b+1}\right)^{1/b}$. Na $[0, s_0\rangle$ je $f''(s) > 0$ i funkcija je konveksna, na $\langle s_0, +\infty\rangle$ je $f''(s) < 0$ i funkcija je konkavna, a s_0 je točka infleksije.

4. **(a)** $x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$ **(b)** $3e^x + \dfrac{x^8}{40} - \dfrac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \cos x - \ln\lvert x\rvert + x + C$

   (c) $-\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}(4x + 7) + C$ **(d)** $\dfrac{7^{x^2}}{2\ln 7} + C$ **(e)** $\dfrac{\operatorname{arctg}(a^x)}{\ln a} + C$ **(f)** $(x - 1)e^x + C$

   (g) $\dfrac{x^3(3\ln x - 1)}{9} + C$ **(h)** $\dfrac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$ **(i)** $x \ln\sqrt{1-x} - \ln\sqrt{x-1} - \dfrac{x}{2} + C$

5. **(a)** $\frac{14}{3}$ **(b)** $\frac{7}{4}$ **(c)** $\sin 2 - \sin 1$ **(d)** $-\frac{2}{3}$ **(e)** 1 **(f)** $\frac{e^2+3}{8}$ **(g)** $\frac{2+\pi}{8}$

6. $P = \ln 2$ 7. $P = e + \frac{1}{e} - 2$