

Domaća zadaća 4

Izračunajte derivacije zadanih funkcija:

1. $f(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^4 + 10x^3 - 17x^2 + 2x - 1$

2. $f(x) = \frac{2}{x} + e^x + \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = 6\sqrt[3]{x^2} - \log_3 x + 2^x - \frac{\cos x}{4} + e^3$

4. $f(x) = e^x \sin x + (x^2 - 2x + 2) \ln x + 2^x \sqrt{x}$

5. $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{e^x}{\cos x} + \frac{x^2 + x + 1}{e^x + \sqrt{x}}$

6. $f(x) = x^2 \sqrt{2x + 12} + \sin(x^2 + 2x + 3) + \ln(1 - x^2)$

7. $f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + \frac{x e^x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

8. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = 2 \ln x + 1$ u točki $x = 3$. Skicirajte taj graf i tu tangentu.

9. Odredite područja rasta, područja pada i stacionarne točke funkcija

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

(b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

10. Odredite područja konveksnosti, područja konkavnosti i točke infleksije funkcija

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

(b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$

11. Odredite točke lokalnog ekstrema i tip ekstrema funkcija

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

(b) $f(x) = x \ln^2 x$

12. Odredite asimptote na graf funkcija

(a) $f(x) = \frac{x^2}{3x - 2}$

(b) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}$

13. Odredite područja rasta/pada, asimptote, područja konveksnosti/konkavnosti, točke infleksije, točke lokalnog minimuma i maksimuma te skicirajte grafove funkcija

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 24$

(b) $f(x) = x e^{-x}$

14. Iskažite Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Za funkciju $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ nađite točku c iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$ tako da tangenta u točki c bude paralelna sekanti kroz rubove intervala.

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Rješenja

1. $f'(x) = 7x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 30x^2 - 34x + 2$
2. $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$
3. $f'(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x \ln 3} + 2^x \ln 2 + \frac{\sin x}{4}$
4. $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + 2(x-1) \ln x + \frac{x^2 - 2x + 2}{x} + 2^x \ln 2 \sqrt{x} + \frac{2^{x-1}}{\sqrt{x}}$
5. $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x} + \frac{(2x+1)(e^x + \sqrt{x}) - (x^2 + x + 1)(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(e^x + \sqrt{x})^2}$
6. $f'(x) = 2x\sqrt{2x+12} + \frac{x^2}{\sqrt{2x+12}} + 2(x+1) \cos(x^2 + 2x + 3) - \frac{2x}{1-x^2}$
7. $f'(x) = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)\sqrt{\sin x}} + \frac{(1+x)e^x}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2} + \frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x} \sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$
8. $y = \frac{2}{3}x - 1 + 2 \ln 3$
9. **(a)** Raste na $\langle -1, +\infty \rangle$, a pada na $\langle -\infty, -1 \rangle$. Stacionarna točka je $x = -1$.
(b) Raste na $\langle 1, +\infty \rangle$, a pada na $\langle -\infty, 0 \rangle$ i na $\langle 0, 1 \rangle$. Stacionarna točka je $x = 1$.
Točka $x = 0$ nije stacionarna jer nije u domeni funkcije!
10. **(a)** Funkcija je konveksna na $\langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$. Točka infleksije je $x = -\frac{1}{2}$. **(b)** Funkcija je konveksna na $\langle -\infty, -2 \rangle$ i na $\langle 2, +\infty \rangle$, a konkavna na $\langle -2, 2 \rangle$.
Točke infleksije su $x = -2$ i $x = 2$.
11. **(a)** Točka lokalnog minimuma je $x = 2$, a točka lokalnog maksimuma je $x = 0$.
(b) Točka lokalnog minimuma je $x = 1$, a točka lokalnog maksimuma je $x = \frac{1}{e^2}$.
12. **(a)** Funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = \frac{2}{3}$ i kosu asimptotu $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$.
(b) Funkcija ima horizontalne asimptote $y = 1$ i $y = -1$.
13. **(a)** Funkcija raste na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i na $\langle 2, +\infty \rangle$, a pada na $\langle -1, 2 \rangle$. Konveksna je na $\langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle$. Točka lokalnog maksimuma je $x = -1$, točka lokalnog minimuma je $x = 2$, a $x = \frac{1}{2}$ je točka infleksije. Nema asimptota. **(b)** Funkcija raste na $\langle -\infty, 1 \rangle$, a pada na $\langle 1, +\infty \rangle$. Konveksna je na $\langle 2, +\infty \rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, 2 \rangle$. Točka lokalnog maksimuma je $x = 1$, a točka infleksije je $x = 2$. Pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota.
14. $c = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$.