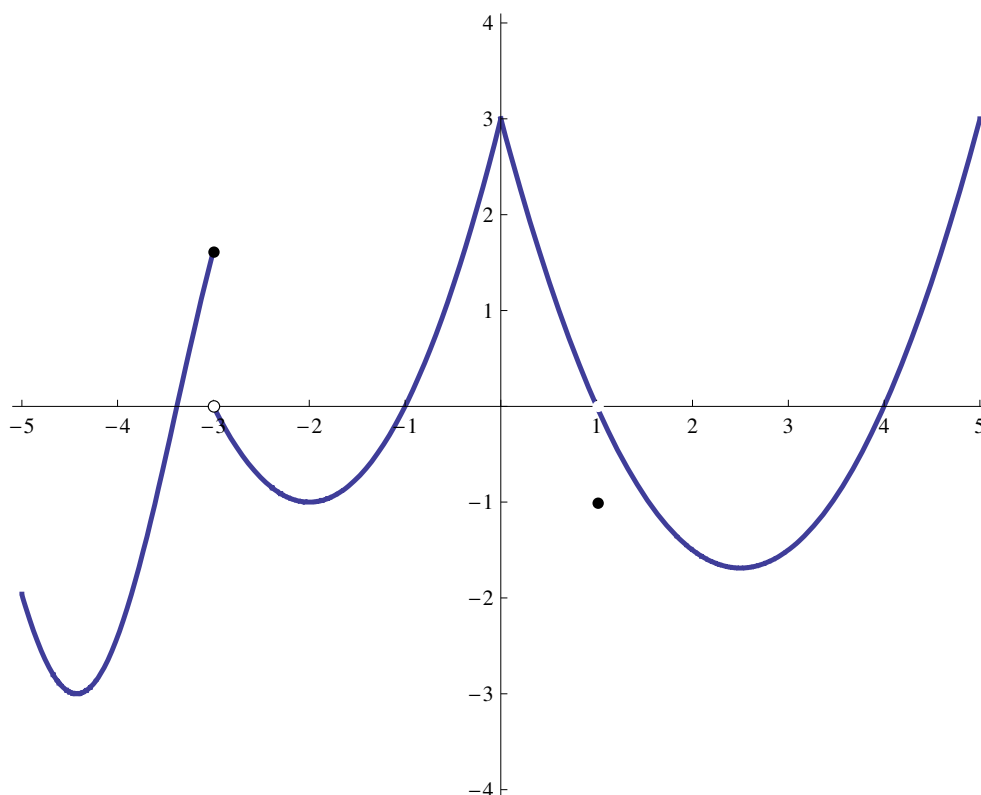


Domaća zadaća 3

1. Dokažite da funkcija $f(x) = 2^x - x - 4$ ima nultočku u intervalu $\langle 2, 3 \rangle$. Odredite tu nultočku do na točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ uz pomoć Maxima materijala za metodu raspolavljanja dostupnog na adresi <https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/matmb/maxima/raspolavljanje.wxm>. Koliko je koraka potrebno napraviti?
2. Na slici je prikazan graf funkcije f . Napišite sve točke iz domene u kojima ta funkcija ima prekid i odredite, ako postoje, limese $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.



3. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je s

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{ako je } x > 1, \\ 0, & \text{ako je } x = 1, \\ x^2, & \text{ako je } x < 1. \end{cases}$$

- (a) Nacrtajte graf funkcije f .
 - (b) Ima li f limes u točki $x_0 = 1$? Ako da, što je $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
 - (c) Je li f neprekidna u točki $x_0 = 1$?
4. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija i $x_0, L \in \mathbb{R}$ brojevi. Definirajte što znači $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$,
 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = +\infty$ i

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$. U kojim slučajevima graf funkcije f ima vertikalnu, odnosno horizontalnu asimptotu?
5. Ako postoje, izračunajte limese
- (a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x - 10}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4) \ln x}{x^2 - 2x - 8}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2 \cos x}$
6. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \frac{(x+1) \sin x}{x^2 + 6x + 5}$. Može li se funkcija proširiti u točkama izvan prirodne domene tako da bude neprekidna? Ako da, odredite kako treba dodefinirati $f(x)$ u tim točkama.
7. Za funkciju $f(x) = \frac{x(4-x)}{(x-2)^2}$ odredite $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Skicirajte graf te funkcije i njezine asimptote.
8. Odredite, ako postoje, horizontalne, vertikalne i kose asimptote na graf funkcije $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

Rješenja

- $x \approx 2.756$, potrebno je 14 koraka.
- Funkcija ima prekid u $x = -3$ i $x = 1$. Limes $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ne postoji. Vrijedi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. (c) Funkcija f nije neprekidna u $x_0 = 1$, tj. ima prekid.
- (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{\ln 2}{3}$ (c) Limes ne postoji. (d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (e) $\frac{1}{2}$ (f) 2 (g) 0
(h) -1 (i) $-\frac{1}{2}$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -5\}$. Za $x = -1$ možemo dodefinirati $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{\sin 1}{4}$. Za $x = -5$ ne postoji $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$, pa ne možemo dodefinirati $f(x)$ u toj točki do neprekidne funkcije.
- Zbog $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$, horizontalna asimptota je pravac $y = -1$.
Zbog $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, vertikalna asimptota je pravac $x = 2$.
- Horizontalna asimptota je pravac $y = 0$. Vertikalnih asimptota nema.
Kosa asimptota je pravac $y = 2x$.