Domaća zadaća 10

1. Dokažite da su funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane sljedećim formulama linearni operatori i odredite njihove matrice u standardnoj bazi $\{(1,0),(0,1)\}$ od $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x,y) = (y,x)$ **(b)** $f(x,y) = (x, x+y)$ **(c)** $f(x,y) = (7x-4y, 8y-3x)$

2. Za sljedeće funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dokažite da nisu linearni operatori.

   (a) $f(x,y) = (y, x+1)$ **(b)** $f(x,y) = (x, x \cdot y)$ **(c)** $f(x,y) = (x^2+2y, x-3y)$

3. Odredite svojstvene vrijednosti i odgovarajuće svojstvene vektore matrica:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(c)** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. Izračunajte koeficijente karakterističnog polinoma $k_A(\lambda)$ matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Koja je veza koeficijenata od $k_A(\lambda)$ sa svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2 od A? Koja je veza determinante $\det A$ s λ_1 i λ_2?

5. Modeliramo populaciju kukaca koji žive najviše dvije godine. U prvoj godini života prosječan broj potomaka je 0.1, a u drugoj godini je 1.3. Vjerojatnost preživljavanja iz prve u drugu godinu je 70 %. Populacija počinje s 1000 kukaca u prvoj godini života i 0 kukaca u drugoj godini života. Postavite Lesliejevu matricu i izračunajte veličinu populacije nakon godinu dana, dvije godine i tri godine. Dugoročno gledano, povećava li se ova populacija ili se smanjuje?

6. Opišite populacijski model zadan Lesliejevom matricom $L = \begin{bmatrix} 0.75 & 1.2 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$. Na koliko je dobnih skupina podijeljena populacija, koje su vjerojatnosti preživljavanja i prosječni brojevi potomaka? Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice L i na temelju toga opišite dugoročno ponašanje populacije. Raste li populacija ili pada i koja je stabilna starosna distribucija?

7. Populacija kukaca koji žive najviše dvije godine razmnožava se tako da u prvoj godini imaju prosječno 1.2 potomaka, a u drugoj godini 1.6 potomaka. Kolika treba biti vjerojatnost preživljavanja od prve do druge godine da bi stabilna starosna distribucija te populacije bila 80% jedinki u prvoj godini života i 20% jedinki u drugoj godini života? Raste li u tom slučaju veličina te populacije ili pada? Koliko dugoročno iznosi godišnja stopa promjene veličine populacije?

Rješenja

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

2. **(a)** Vrijedi $f(0,0) = (0,1)$, pa f ne preslikava nulvektor u nulvektor.
(b) Vrijedi $f(1,0) = (1,0)$, $f(0,1) = (0,0)$ i $f(1,1) = (1,1)$, pa je $f(1,0)+f(0,1) \neq f((1,0)+(0,1))$.
(c) Vrijedi $f(2,0) = (4,2)$ i $f(1,0) = (1,1)$, pa je $f(2\cdot(1,0)) \neq 2\cdot f(1,0)$.

3. **(a)** $\lambda_1 = 2$, $X_1 = (2,1)$; $\lambda_2 = -1$, $X_2 = (1,-1)$, **(b)** $\lambda_1 = 3+\sqrt{2}$, $X_1 = (1,\sqrt{2})$; $\lambda_2 = 3-\sqrt{2}$, $X_2 = (1,-\sqrt{2})$, **(c)** Matrica C nema svojstvenih vrijednosti.

4. $k_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$. Svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su nultočke karakterističnog polinoma, pa vrijedi $k_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$ (Vieteove formule). Usporedbom vidimo da je $\lambda_1+\lambda_2 = a+d$ i $\lambda_1\lambda_2 = ad-bc = \det A$, dakle determinanta je jednaka produktu svojstvenih vrijednosti.

5. Lesliejeva matrica i početna starosna distribucija: $L = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.3 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix}$, $N(0) = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix}$. Starosna distribucija i ukupna veličina populacije prve tri godine: $N(1) = L\cdot N(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 700 \end{bmatrix}$ (ukupno 800 jedinki), $N(2) = L\cdot N(1) = \begin{bmatrix} 920 \\ 70 \end{bmatrix}$ (ukupno 990 jedinki), $N(3) = L\cdot N(2) = \begin{bmatrix} 183 \\ 644 \end{bmatrix}$ (ukupno 827 jedinki). Da bismo odredili dugoročno ponašanje računamo svojstvene vrijednosti Lesliejeve matrice: $\lambda_1 = 1.00525$, $\lambda_2 = -0.905249$. Vodeća svojstvena vrijednost je $\lambda_1 > 1$, pa populacija dugoročno raste.

6. Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 0.991948$ i $\lambda_2 = -0.241948$, a svojstveni vektori $X_1 = (0.980273, 0.197646)$ i $X_2 = (-0.770759, 0.637127)$. Vodeća svojstvena vrijednost je $\lambda_1 < 1$, pa populacija dugoročno pada i izumire. Odgovarajući normalizirani svojstveni vektor $\frac{1}{0.980273+0.197646}X_1 = (0.832207, 0.167793)$ (sa sumom koordinata 1) daje stabilnu starosnu distribuciju: 83.2 % populacije u prvoj dobnoj skupini i 16.8 % populacije u drugoj dobnoj skupini.

7. Lesliejeva matrica je $L = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.6 \\ p & 0 \end{bmatrix}$. Stabilna starosna distribucija $X = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ odgovara svojstvenom vektoru pridruženom vodećoj svojstvenoj vrijednosti λ, pa mora vrijediti $L\cdot X = \lambda X$. Iz toga dobivamo sustav linearnih jednadžbi $0.8\lambda = 1.28$, $0.2\lambda = 0.8p$ kojemu je rješenje $\lambda = 1.6$, $p = 0.4$. Zaključujemo da je vjerojatnost preživljavanja od prve do druge godine 40%, a godišnji faktor promjene populacije je 1.6, tj. populacija dugoročno raste za 60% svake godine.