1	2	3	4	5	Σ

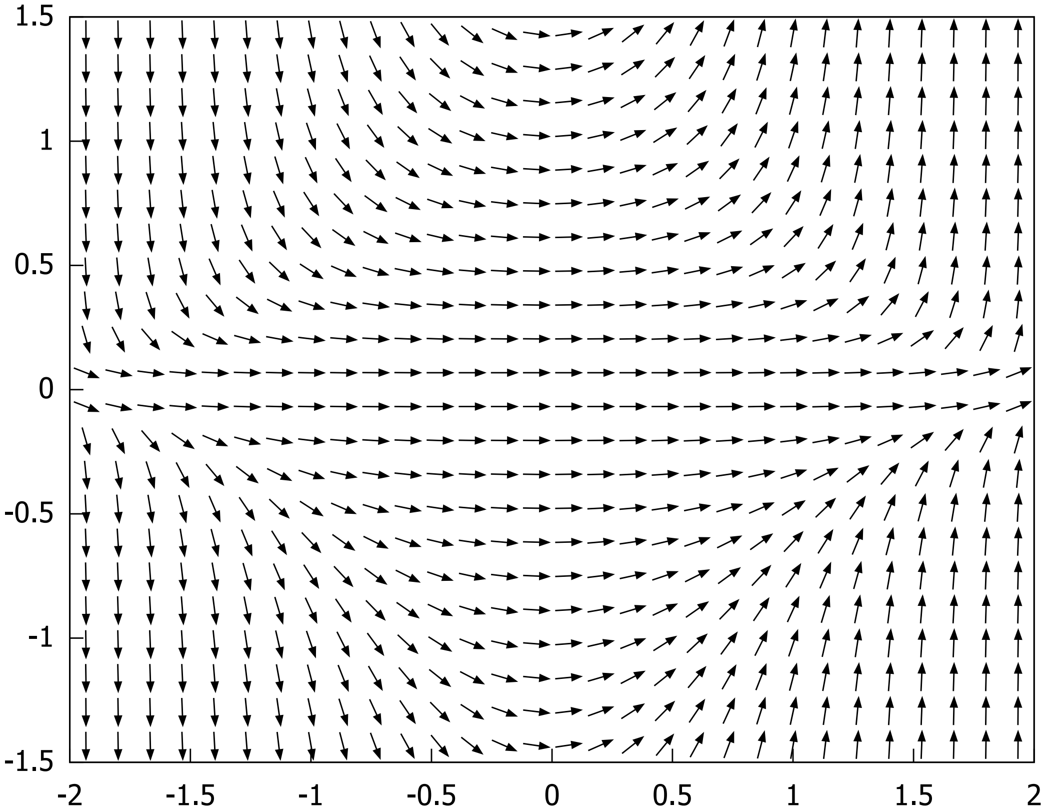
Ime i prezime: ____

Drugi kolokvij, 24.6.2021.

1. (1+6 bodova)

(a) Definirajte pojam rješenja diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' = R(x, y)$.

(b) Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = x\,y^2 e^{x^2}$ koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = -1$. Skicirajte graf tog rješenja u zadanom polju pravaca:



2. (4+4 bodova) Modeliramo populaciju kukaca koji žive najviše tri godine. Od prve do druge godine preživljava 25% kukaca, a od druge do treće godine 20% kukaca. U prvoj godini života kukci se ne razmnožavaju, u drugoj godini imaju prosječno 5 potomaka, a u trećoj godini prosječno 2.5 potomaka.

(a) Postavite Lesliejevu matricu L i izračunajte njezin inverz L^{-1}.

(b) Ako je ove godine brojnost populacije zadana matricom $N(t) = \begin{bmatrix} 1500 \\ 250 \\ 50 \end{bmatrix}$, odredite brojnost populacije iduće godine $N(t+1)$ i prethodne godine $N(t-1)$.

3. (1+3+3 bodova)

(a) Definirajte linearnu nezavisnost konačnog skupa vektora.

(b) Dokažite da je skup matrica $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ linearno zavisan, pri čemu je

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Koja je dimenzija vektorskog prostora M_2 svih 2×2 matrica? Koja je dimenzija potprostora od M_2 razapetog skupom $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$? Napišite jednu bazu tog potprostora.

4. (1+2+3+2 bodova)

(a) Definirajte svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore kvadratne matrice.

(b) Nađite primjer matrice $A \in M_2$ koja ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 7$.

(c) Definirajte karakteristični polinom $k_A(\lambda)$ matrice $A \in M_2$. Opišite vezu karakterističnog polinoma sa svojstvenim vrijednostima matrice (bez dokazivanja).

(d) Nađite primjer matrice koja ima karakteristični polinom $k_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10$.

5. (5 bodova) Neka su $X = (x_1, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ vektori iz $\mathbb{R}^n$. Definirajte skalarni produkt $X \cdot Y$ i normu $\|X\|$. Dokažite nejednakost Schwarz–Cauchy–Bunjakovskog:

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \, \|Y\|.$$

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\, x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\, \mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$