1	2	3	4	5	6	7	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Drugi kolokvij, 10.6.2020.

1. Definirajte neodređeni integral funkcije. Objasnite izvode pravila supstitucije i pravila parcijalne integracije za neodređeni integral.

2. **(a)** Izračunajte neodređeni integral $\displaystyle\int \sin(\cos x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$.

(b) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_1^2 x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$ i objasnite njegovu geometrijsku interpretaciju.

3. Funkcija $y(t)$ predstavlja brojnost populacije bakterija u milijunima, pri čemu je t vrijeme u danima. Funkcija zadovoljava logističku diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{1}{50}\, y \cdot (100 - 3y)$ i početni uvjet $y(0) = 1$. Riješite diferencijalnu jednadžbu i odredite veličinu populacije nakon puno vremena, tj. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

4. Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav linearnih jednadžbi i objasnite geometrijsku interpretaciju skupa svih njegovih rješenja:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

5. Definirajte pojam inverzne matrice. Dokažite da je inverzna matrica jedinstvena, ako postoji. Kako za 2×2 matrice prepoznajemo imaju li ili nemaju inverznu matricu?

6. Neka je $\mathcal{W}$ skup svih 2×2 matrica koje komutiraju s matricom $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tj.

$$\mathcal{W} = \{A \in M_2 \mid A \cdot T = T \cdot A\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{W}$ potprostor vektorskog prostora M_2 i odredite mu bazu i dimenziju.

7. Promatramo populaciju kukaca koji žive najviše tri godine. Kukci u prvoj godini života nemaju potomaka, u drugoj godini prosječno imaju 1.4 potomaka, a u trećoj godini 1.2 potomaka. Vjerojatnost preživljavanja kukaca od prve do druge godine je 45%, a od druge do treće godine 30%. Postavite Lesliejevu matricu i odredite dugoročno ponašanje populacije ako je poznato da se stabilna starosna distribucija sastoji od 60% kukaca u prvoj godini života, 30% u drugoj godini života i 10% u trećoj godini života. Raste li ova populacija ili pada i za koji se faktor dugoročno mijenja svake godine?

Napomena. Svaki zadatak vrijedi 5 bodova. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula na stražnjoj strani papira.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Ime i prezime: ______________________________

Kolokvij (cijelo gradivo), 10.6.2020.

1. (10 bodova) Veličinu populacije bakterija modeliramo nizom (B_n) zadanim rekurzijom

$B_{n+1} = \dfrac{120B_n}{60+B_n}$ i početnom veličinom $B_0 = 20$ (u milijunima).

(a) Izračunajte veličinu populacije u iduće tri generacije: B_1, B_2, i B_3.

(b) Dokažite da je niz (B_n) konvergentan i izračunajte mu limes.

(c) Objasnite što se dugoročno događa s ovom populacijom bakterija.

2. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \dfrac{1}{\ln(-x^2+4x-3)}$.

3. (6 bodova) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ precizno definirajte što znači $\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = 5$ i $\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = +\infty$. Skicirajte graf neke funkcije koja ima oba svojstva. Može li takva funkcija biti neprekidna?

4. (7 bodova) Definirajte derivaciju funkcije u točki. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = \sin(x^2+x-2)$ i odredite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $x_0 = 1$.

5. (6 bodova) Rast tumora opisan je Gompertzovom funkcijom $f(t) = e^{-e^{10-2t}}$, gdje varijabla t predstavlja vrijeme u mjesecima. Odredite nakon koliko mjeseci tumor prelazi iz ubrzanog rasta u usporeni rast.

6. (7 bodova)

(a) Izračunajte neodređeni integral $\displaystyle\int \sin(\cos x)\cdot \sin x \,\mathrm{d}x$.

(b) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_1^2 x\cdot \ln x \,\mathrm{d}x$ i objasnite njegovu geometrijsku interpretaciju.

7. (7 bodova) Gaussovom metodom eliminacija riješite sustav linearnih jednadžbi i objasnite geometrijsku interpretaciju skupa svih njegovih rješenja:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 7 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

8. (7 bodova) Definirajte pojam inverzne matrice. Dokažite da je inverzna matrica jedinstvena, ako postoji. Kako za 2×2 matrice prepoznajemo imaju li ili nemaju inverznu matricu?

9. (7 bodova) Neka je $\mathcal{W}$ skup svih 2×2 matrica koje komutiraju s matricom $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tj.

$$\mathcal{W} = \{A \in M_2 \mid A \cdot T = T \cdot A\}.$$

Dokažite da je $\mathcal{W}$ potprostor vektorskog prostora M_2 i odredite mu bazu i dimenziju.

10. (7 bodova) Promatramo populaciju kukaca koji žive najviše tri godine. Kukci u prvoj godini života nemaju potomaka, u drugoj godini prosječno imaju 1.4 potomaka, a u trećoj godini 1.2 potomaka. Vjerojatnost preživljavanja kukaca od prve do druge godine je 45%, a od druge do treće godine 30%. Postavite Lesliejevu matricu i odredite dugoročno ponašanje populacije ako je poznato da se stabilna starosna distribucija sastoji od 60% kukaca u prvoj godini života, 30% u drugoj godini života i 10% u trećoj godini života. Raste li ova populacija ili pada i za koji se faktor dugoročno mijenja svake godine?

Napomena. Ovaj papir predajte zajedno s papirima na kojima ste rješavali zadatke. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i formula u nastavku.

Pravila deriviranja

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Pravila integriranja

$$\int (C \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ \mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x \end{bmatrix} =$$

$$= \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Tablica integrala

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$