Kombinatorika 2026./27., najavljena pitanja za prvi kolokvij

1. Definicije i dokazi rekurzija za binomne koeficijente $\binom{n}{k}$, Stirlingove brojeve prve i druge vrste $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ i $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$ te Lahove brojeve $L(n,k)$.

2. Teorem 3.16. Broj rasporeda k identičnih topova na ploču Δ_n tako da se ne napadaju jednak je Stirlingovom broju druge vrste $\left\{{n \atop n-k}\right\}$.

3. Kombinatorno dokažite formule

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}, \qquad L(n,k) = \sum_{i=k}^{n} \left[{n \atop i}\right] \left\{{i \atop k}\right\} \quad \text{i} \quad x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)x^{\underline{k}}.$$

4. Teorem 5.4. Neka su μ i ν particije prirodnog broja n. Ferrersove ploče $\mathrm{dg}(\mu)$ i $\mathrm{dg}(\nu)$ su topovski ekvivalentne ako i samo ako su multiskupovi $\{\mu_1+1, \mu_2+2, \ldots, \mu_n+n\}$ i $\{\nu_1+1, \nu_2+2, \ldots, \nu_n+n\}$ jednaki.

5. Teorem 5.12. Neka je G bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$. Za skup vrhova $A \subseteq V$ označimo s $N(A)$ skup svih vrhova susjednih nekom vrhu iz A. Graf G dopušta sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X ako i samo ako vrijedi uvjet $|N(A)| \geq |A|$, za svaki $A \subseteq X$.

6. Definirajte permanentu kvadratne matrice $\mathrm{per}(A)$. Ako A ima unose iz $\{0,1\}$, interpretirajte $\mathrm{per}(A)$ kao 1. broj rasporeda topova koji se ne napadaju, 2. broj savršenih sparivanja bipartitnog grafa, 3. broj permutacija sa zabranjenim pozicijama.

7. Teorem 6.6. Broj permutacija $\pi \in S_n$ sa zabranjenim pozicijama iz $P \subseteq \square_n$ je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, r_k(P) \, (n-k)!.$$

8. Teorem 7.6. Za svake dvije funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je

(a) $g(m) = \displaystyle\sum_{d \,|\, m} f(d), \ \ \forall m \in \mathbb{N},$

(b) $f(m) = \displaystyle\sum_{d \,|\, m} \mu(d)\, g(\frac{m}{d}), \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$