Domaća zadaća 6

1. Izmislite zanimljiv niz cijelih brojeva, unesite ga u OEIS i budite u "top 10" prilikom izbora za niz A500K!

2. Odredite dimenziju vektorskog prostora gornjetrokutastih matrica $T_n(\mathbb{R})$. Ako je $P = (X, \leq)$ parcijalno uređen skup s $n = |X|$ elemenata, koja je najmanja moguća i najveća moguća dimenzija incidencijske algebre $I(P)$? Za koje se parcijalne uređaje $\leq$ postižu te dimenzije?

3. Nacrtajte Hasseov dijagram Booleove rešetke $B_4 = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$. Kraj svakog vrha $X \subseteq \{1,2,3,4\}$ označite vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(\emptyset, X)$.

4. Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa djelitelja $D(20)$ i odredite vrijednosti odgovarajuće Möbiusove funkcije $\mu(2,5)$, $\mu(1,4)$, $\mu(2,4)$ i $\mu(2,20)$. Koja je dimenzija incidencijske algebre $I(D(20))$?

5. U parcijalno uređenom skupu Π_5 particija skupa $\{1,2,3,4,5\}$ s relacijom profinjenja, zadani su elementi $\mathcal{A} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ i izračunajte $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

6. Elementi Youngove rešetke $\mathcal{Y}$ su particije prirodnih brojeva. Dvije particije $A = (a_1, \ldots, a_k)$ i $B = (b_1, \ldots, b_m)$ su u relaciji $A \leq B$ ako je $k \leq m$ i vrijedi $a_i \leq b_i$, za $i = 1, \ldots, k$ (tj. ako je Ferrersov dijagram od A podskup Ferrersova dijagrama od B). Neka su $A = (1)$, $B = (2,2)$, $C = (3,1,1) \in \mathcal{Y}$. Nacrtajte Hasseove dijagrame segmenata $[A, B]$ i $[A, C]$ te izračunajte $\mu(A, B)$, $\mu(A, C)$ i $\mu(B, C)$.

7. Odredite kombinatornu interpretaciju vrijednosti $\zeta^2(x, y)$ kvadrata zeta funkcije.

8. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = n$. Nadalje, postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = -n$.