Domaća zadaća 5

1. Na koliko načina možemo izabrati 5 karata iz špila od 32 karte (po 8 karata u četiri boje: ♠, ♢, ♡, ♣) tako da imamo bar jednu kartu svake boje?

2. Koliko ima podskupova od $\{1, 2, \ldots, 6n\}$ koji sadrže bar jedan paran broj i bar jedan broj djeljiv s 3? Brojevi ne moraju biti različiti, npr. podskup $\{6\}$ zadovoljava uvjet.

3. Koliko ima permutacija multiskupa $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2\}$ (n različitih elemenata kratnosti 2) u kojima su susjedni elementi različiti?

4. Koliko ima grafova sa skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ koji nemaju izoliranih vrhova? Za vrh kažemo da je izoliran ako je stupnja 0, tj. nije incidentan niti s jednim bridom.

5. Odredite broj permutacija $\pi \in S_5$ sa zabranjenim pozicijama iz skupa $P = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

6. Odredite broj permutacija $\pi \in S_4$ takvih da je $\pi(1) \neq 3$, $\pi(2) < 3$ i $\pi(4) > 1$.

7. Odredite broj permutacija $\pi \in S_6$ takvih da $\pi(1)$ i $\pi(2)$ nisu djeljivi s 3, $\pi(3)$ i $\pi(4)$ nisu djeljivi s 4, a $\pi(5)$ i $\pi(6)$ nisu djeljivi s 5.

8. Graf G dobijemo od potpunog bipartitnog grafa $K_{n,n}$, $n \geq 2$, tako da iz njega izbacimo bridove jednog ciklusa duljine 4. Koliko ima savršenih sparivanja u grafu G?

   Uputa: Interpretirajte kao problem prebrojavanja permutacija sa zabranjenim pozicijama, ili rasporeda nenapadajućih topova na krnjoj šahovskoj ploči.

9. Kartaška igra *minisnap* igra se s dva špila od šest karata označenih brojevima $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dva igrača dobiju svaki po jedan špil, promiješaju karte i u svakoj "rundi" pokazuju kartu s vrha. Ako brojevi na pokazanim kartama daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, to je *snap* i igra se prekida. U suprotnom, pokazane karte stavljaju se u stranu i igra se nastavlja s preostalim kartama. Koja je vjerojatnost da će igrači odigrati svih šest "runda" bez da se dogodi *snap*?

   Uputa: Postavite kao problem prebrojavanja permutacija sa zabranjenim pozicijama.

10. Neka su n, k prirodni brojevi. Koliko ima permutacija $\pi \in S_n$ takvih da je $\pi(i) > i$ za sve $i \in \{1, \ldots, k-1\}$?