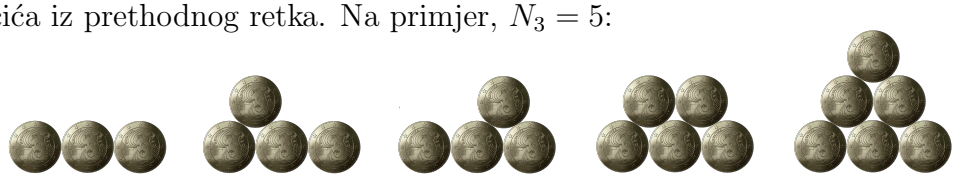
Domaća zadaća 3

1. Neka P_n označava broj "planinskih lanaca" koji se mogu nacrtati s n znakova / i n znakova \, a ne silaze ispod početnog nivoa. Na primjer, $P_3 = 5$:



   Neka N_n označava broj konfiguracija novčića koje u prvom retku imaju n novčića jedan do drugog, a u svakom sljedećem retku svaki novčić dodiruje dva susjedna novčića iz prethodnog retka. Na primjer, $N_3 = 5$:



   Dokažite da je $P_n = N_n = C_n$ (n-ti Catalanov broj) i pronađite još nekoliko kombinatornih interpretacija Catalanovih brojeva!

2. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ koja zadovoljavaju uvjete $x_i \geq i$, za $i = 1, 2, 3, 4$?

3. Na koliko načina možemo podijeliti b identičnih bombona među d djece (bez dodatnih uvjeta)? Na koliko načina ih možemo podijeliti tako da svako dijete dobije bar jedan bombon?

4. Odredite konjugiranu particiju od $\mu = (9, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1)$.

5. Dokažite binomni teorem za broj surjekcija: za sve $n, x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathrm{Sur}(n, x + y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{Sur}(n - i, x) \, \mathrm{Sur}(i, y).$$

6. Iz prethodnog zadatka izvedite identitet koji uključuje Stirlingove brojeve druge vrste i binomne koeficijente. Pronađite ga na str. 265 knjige "Concrete mathematics, 2nd ed".

7. Na koliko načina možemo rasporediti n predmeta u k kutija tako da niti jedna kutija ne ostane prazna, ako:

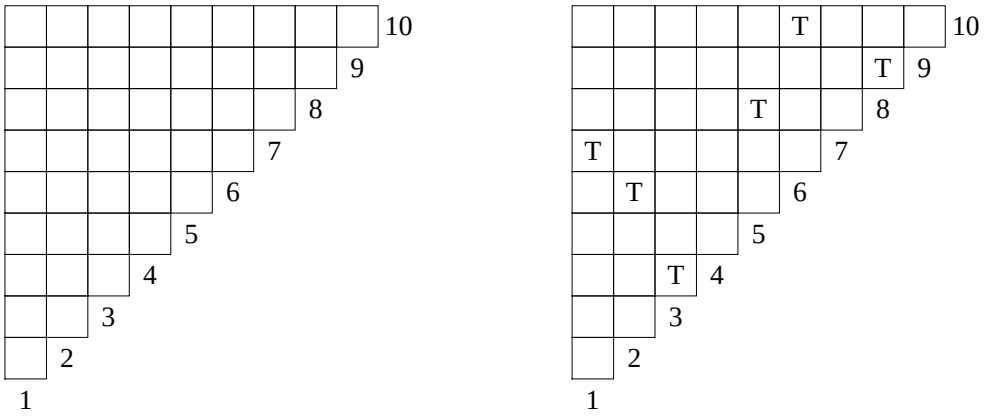
   (a) predmeti su različiti i kutije su različite,

   (b) predmeti su identični, a kutije su različite,

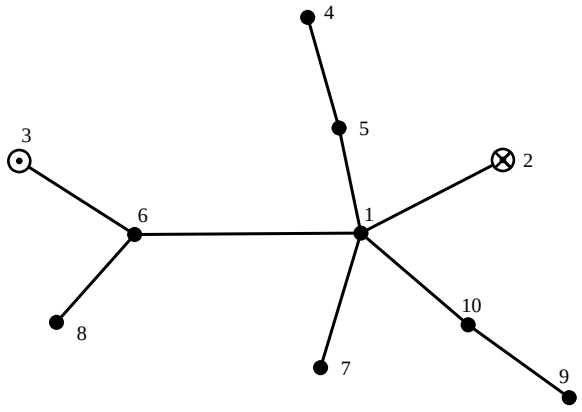
   (c) predmeti su različiti, a kutije su identične,

   (d) predmeti su identični i kutije su identične?

8. Neka je $X = \{1, \ldots, 10\}$. U sliku lijevo ucrtajte raspored topova koji odgovara particiji $\{\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 9\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{10\}\}$ skupa X. Zapišite particiju skupa X koja odgovara rasporedu topova na slici desno.



9. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici. Glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$.



10. Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara sljedećoj endofunkciji:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
↧	↧	↧	↧	↧	↧	↧	↧	↧	↧
7	6	5	1	3	9	8	7	3	4