Domaća zadaća 2

1. Gaussovim trikom dokažite formulu za sumu prvih n neparnih brojeva:
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

2. Izvedite formulu za n-ti peterokutni broj p_n.

3. Metodom dvostrukog prebrojavanja (slično kao dokaz teorema 1.6 u skripti) dokažite da binomni teorem vrijedi za padajuće faktorijele:
$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{n-k}}\,y^{\underline{k}}.$$
Vrijedi li za rastuće faktorijele?

4. Izveli smo formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ i $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Iz toga slijedi identitet
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$
poznat kao *Nikomahov teorem*. Dokažite ga kombinatorno, uspostavljanjem bijekcije između skupa parova $\{(\{a,b\},\{c,d\}) \mid 0 \le a,b,c,d \le n, a \ne b, c \ne d\}$ i skupa četvorki $\{(a,b,c,d) \mid 0 \le a,b,c < d \le n\}$. Vizualni dokaz pogledajte u ovom članku: https://web.math.hr/~krcko/pub/nikomah.pdf.

5. Prikažite x^4 kao linearnu kombinaciju padajućih faktorijela. Pokušajte naslutiti koeficijente u prikazu potencije x^m kao linearne kombinacije padajućih faktorijela $x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{m}}$. (Pogledajte sliku na naslovnoj stranici skripte.)

6. Izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

7. Metodom parcijalne sumacije izračunajte:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot F_k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2^k}$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)}$, (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$, (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}H_k$, (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k\cdot F_k$.

8. Za konstantu c odredite $\Delta(c^{\underline{x}})$. Pomoću tog rezultata izračunajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}$.