

Domaća zadaća 1

1. Koliko ima peteroznamenastih prirodnih brojeva koji su parni i nemaju znamenku 3 na prva dva mjesta?
2. Koliko ima šesteroznamenastih prirodnih brojeva koji su neparni i u zapisu imaju bar jednu znamenku 0?
3. Neka je $|S| = n$ i $|T| = k$. Koliko ima funkcija $f : S \rightarrow T$? Koliko ima injekcija $f : S \rightarrow T$? Koliko ima surjekcija $f : S \rightarrow T$?
4. Dokažite sljedeće tvrdnje.
 - (a) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je injekcija ako i samo ako postoji njezin lijevi inverz, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $g \circ f = id_S$.
 - (b) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je surjekcija ako i samo ako postoji njezin desni inverz, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $f \circ g = id_T$.
 - (c) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je bijekcija ako i samo ako postoji njoj inverzna funkcija, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $g \circ f = id_S$ i $f \circ g = id_T$.
 - (d) Ako postoji inverzna funkcija od $f : S \rightarrow T$, onda je jedinstvena. To opravdava oznaku $f^{-1} : T \rightarrow S$ za inverznu funkciju.
 - (e) Ako postoji injekcija $f : S \rightarrow T$, onda je $|S| \leq |T|$.
 - (f) Ako postoji surjekcija $f : S \rightarrow T$, onda je $|S| \geq |T|$.
5. Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ realni polinomi dviju varijabli. Ako vrijedi $f(m, n) = g(m, n)$ za sve prirodne brojeve $m, n \in \mathbb{N}$, dokažite da su tada ti polinomi identički jednaki: $f(x, y) = g(x, y)$ za sve realne brojeve $x, y \in \mathbb{R}$.
6. Dokažite formulu za Stirlingov broj druge vrste $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$.
7. Dokažite formulu $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$. Izvedite analognu formulu za Stirlingov broj prve vrste $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right]$.
8. Neka je $p(n, k)$ broj particija prirodnog broja n duljine k . Dokažite da za sve $k < n$ vrijedi $p(n, k) = \sum_{i=1}^k p(n-k, i)$.