

1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - pismeni ispit, 11.9.2026.

1. (a) Neka $\text{Sur}(n, k)$ označava broj surjekcija s n -članog na k -člani skup. Dokažite da za sve prirodne brojeve n, x, y vrijedi

$$\text{Sur}(n, x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Sur}(n - k, x) \text{Sur}(k, y).$$

- (b) Objasnite vezu $\text{Sur}(n, k)$ sa Stirlingovim brojevima druge vrste. Iz formule u (a) dijelu zadatka izvedite identitet za Stirlingove brojeve druge vrste.

2. Neka su n, k prirodni brojevi. Koliko ima permutacija $\pi \in S_n$ takvih da je $\pi(i) > i$ za sve $i \in \{1, \dots, k - 1\}$?

3. (a) Definirajte što znači da je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup, što je lanac $L \subseteq X$ i što je predznak lanca $\text{sgn}(L)$.

- (b) Definirajte Möbiusovu funkciju $\mu \in I(P)$ i dokažite formulu

$$\mu(x, y) = \sum_{L \in S_{x,y}} \text{sgn}(L).$$

4. (a) Neka je a_n niz brojeva te $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$ odgovarajuću niz parcijalnih suma. Koja je veza između funkcija izvodnica $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i

$$B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n?$$

- (b) Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2$.

(c) Razvijte funkciju izvodnicu niza $b_n = \sum_{i=0}^n i^2$ u red potencija i zapišite opći član b_n kao linearnu kombinaciju dvaju binomnih koeficijenata.

5. Funkcija izvodnica zadana je zatvorenom formulom

$$F(z) = \frac{z^2}{e^z - e^{-z}}.$$

Iskažite i provjerite uvjet za postojanje kompozicijskog inverza

$$F^{(-1)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

S pomoću Lagrangeove formule inverzije (na dnu stranice) izračunajte koeficijente a_n . Dokažite da vrijedi $F^{(-1)}(-z) = -F^{(-1)}(z)$ i odredite vrijednost sume $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2k-n)^{2n-1}$ za parne $n \in \mathbb{N}$.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 12 bodova.

Vedran Krčadinac

Teorem (Lagrangeova formula inverzije).

Kompozicijski inverz $F^{(-1)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ funkcije izvodnice $F(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ ima koeficijente

$$a_n = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(\frac{z}{F(z)} \right)^n.$$