

1	2	3	4	5	6	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - pismeni ispit, 28.8.2026.

1. Neka F_k označava k -ti Fibonaccijev broj. Metodom parcijalne sumacije izračunajte

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{2^k}.$$

2. Neka su μ i ν particije prirodnog broja n . Dokažite da su Ferrersove ploče $\text{dg}(\mu)$ i $\text{dg}(\nu)$ topovski ekvivalentne ako i samo ako su multisкупovi $\{\mu_1 + 1, \mu_2 + 2, \dots, \mu_n + n\}$ i $\{\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \dots, \nu_n + n\}$ jednaki.
3. Koliko ima rasporeda $2n$ nenapadajućih topova na kvadratnoj ploči $\square_{2n}$ takvih da niti jedan top nije na gornjem lijevom “trokutu” $\Delta_n = \text{dg}(n-1, n-2, \dots, 2, 1)$? Odgovor zapišite u obliku sume, prebrojavanjem permutacija sa zabranjenim pozicijama. Zatim direktno prebrojite rasporede, postavljanjem topova odozgo prema dolje. Izjednačite rezultate i izvedite kombinatorni identitet!
4. Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup.
- (a) Što su elementi incidencijske algebre $I(P)$? Definirajte operaciju množenja elemenata iz $I(P)$ i navedite njezina svojstva.
- (b) Definirajte zeta funkciju $\zeta \in I(P)$ i Möbiusovu funkciju $\mu \in I(P)$. Obrazložite zašto ζ ima multiplikativni inverz.
- (c) Dokažite da je za svake dvije funkcije $f, g \in I(P)$ ekvivalentno
- (a) $g(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} f(x, z),$ (b) $f(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} g(x, z)\mu(z, y).$

5. Neka je a_n broj nizova duljine n sastavljenih od znamenaka 1, 2 i 3 u kojima se znamenke 1 i 3 pojavljuju parno mnogo puta, a znamenka 2 neparno mnogo puta. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n .
6. Funkcija izvodnica zadana je zatvorenom formulom

$$F(z) = \frac{z^2}{e^z - e^{-z}}.$$

Iskažite i provjerite uvjet za postojanje kompozicijskog inverza

$$F^{(-1)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

S pomoću Lagrangeove formule inverzije (na dnu stranice) izračunajte koeficijente a_n . Dokažite da vrijedi $F^{(-1)}(-z) = -F^{(-1)}(z)$ i odredite vrijednost sume $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2k-n)^{2n-1}$ za parne $n \in \mathbb{N}$.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Vedran Krčadinac

Teorem (Lagrangeova formula inverzije).

Kompozicijski inverz $F^{(-1)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ funkcije izvodnice $F(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ ima koeficijente

$$a_n = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(\frac{z}{F(z)} \right)^n.$$