

1	2	3	4	5	6	Σ

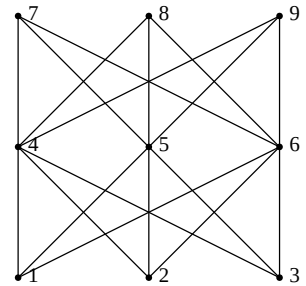
MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - pismeni ispit, 18.2.2026.

1. Definirajte rastući faktorijel $x^{\overline{n}}$ i Stirlingov broj prve vrste $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$. Dvostrukim prebrojavanjem dokažite identitet

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k.$$



2. Parcijalni uređaj $\leq$ na skupu $X = \{1, 2, \dots, 9\}$ zadan je Hasseovim dijagramom desno. Za $P = (X, \leq)$, odredite dimenziju incidencijske algebre $I(P)$ i izračunajte vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(1, 9)$.
3. (a) Definirajte particiju prirodnog broja i topovsku ekvivalenciju particija.
 (b) Nađite sve particije broja 5 koje su topovski ekvivalentne particiji $(3, 1, 1)$.
 (c) Za svaku od particija μ iz (b) dijela zadatka odredite broj permutacija $\pi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sa zabranjenim pozicijama iz $\text{dg}(\mu)$.
4. Definirajte Spernerovu familiju skupova. Iskažite nejednakost LYM i dokažite je vjerojatnosnom metodom.
5. (a) Neka je a_n niz brojeva te $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$ odgovarajuću niz parcijalnih suma. Koja je veza između funkcija izvodnica $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$?
 (b) Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2$.
 (c) Razvijte funkciju izvodnicu niza $b_n = \sum_{i=0}^n i^2$ u red potencija i zapišite opći član b_n kao linearnu kombinaciju dvaju binomnih koeficijenata.
6. Ispit iz Kombinatorike prijavilo je n studenata. Neka je a_n broj načina na koje im nastavnik može zaključiti ocjene tako da bar jedan student dobije izvrstan (5) i paran broj studenata dobije vrlo dobar (4). Na ocjene dobar (3), dovoljan (2) i nedovoljan (1) nema ograničenja. Napišite zatvorenu formulu za eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n . Ima li $F(z)$ multiplikativni, odnosno kompozicijski inverz u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$?

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Vedran Krčadinac