

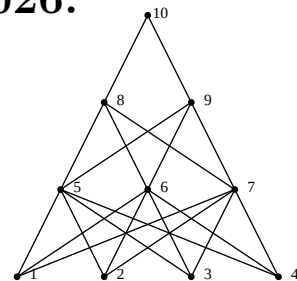
1	2	3	4	5	Σ

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

Kombinatorika - drugi kolokvij, 4.2.2026.

1. Parcijalni uređaj $\leq$ na skupu $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ zadan je Hasseovim dijagramom desno. Za $P = (X, \leq)$, odredite dimenziju incidencijske algebre $I(P)$ i izračunajte vrijednosti Möbiusove funkcije $\mu(2, 8)$ i $\mu(1, 10)$.



2. Definirajte Ramseyev broj $R(k, k)$ i dokažite: ako vrijedi $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, onda je $R(k, k) > n$. Izvedite ocjenu $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$, za sve $k \geq 3$.
3. Neka je a_n broj nizova duljine n sastavljenih od znamenaka 1, 2 i 3 u kojima se znamenke 1 i 3 pojavljuju parno mnogo puta, a znamenka 2 neparno mnogo puta. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n .
4. (a) Neka je $F_k(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, $k \geq 0$ niz funkcija izvodnica. Definirajte što znači da taj niz konvergira prema nekoj funkciji izvodnici $F(z) \in \mathbb{C}[[z]]$.
- (b) Definirajte beskonačni produkt funkcija izvodnica $\prod_{k \geq 0} (1 + F_k(z))$ i iskažite kriterij za njegovu konvergenciju.
- (c) Provjerite da je beskonačni produkt

$$F(z) = \prod_{k \geq 0} (1 + z^{2^k}) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8)(1 + z^{16}) \dots$$

konvergentan i odredite koeficijente i zatvorenu formulu za $F(z)$.

5. Neka je $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ funkcija izvodnica implicitno zadana jednačbom

$$f(z) = z \left(e^{f(z)} + e^{-f(z)} \right).$$

S pomoću Lagrangeove formule inverzije (na stražnjoj strani papira!) izračunajte koeficijente a_n . Iz jednačbe zaključite da vrijedi $f(-z) = -f(z)$ i odredite vrijednost sume $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2k - n)^{n-1}$ za parne $n \in \mathbb{N}$.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator. Svaki zadatak vrijedi 6 bodova.

Vedran Krčadinac

Teorem (Lagrangeova formula inverzije).

Funkcija izvodnica $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ implicitno zadana jednažbom

$$f(z) = z \cdot G(f(z))$$

ima koeficijente

$$a_n = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle (G(z)^n) .$$