Kombinatorika 2025./26., najavljena pitanja za prvi kolokvij

Kombinatorni dokazi formula iz DZ2, zad. 1 i DZ3, zad. 5:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{n-k}} y^{\underline{k}}, \qquad \operatorname{Sur}(n, x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Sur}(n-k, x) \operatorname{Sur}(k, y).$$

Teorem 4.5. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$

Teorem 4.7. Broj rasporeda k identičnih slabih topova na ploču Δ_n tako da se ne napadaju jednak je Stirlingovom broju prve vrste $\left[{n \atop n-k} \right]$.

Teorem 4.9. $(\mathcal{R} \to \mathcal{S})$ $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$. Dokaz dvostrukim prebrojavanjem!

Izvedite formulu za broj k-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Dokažite da je riječ o polinomu stupnja $k(n-k)$ u varijabli q. https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/komb/q-binomni.pdf

Teorem 5.4. Neka su μ i ν particije prirodnog broja n. Ferrersove ploče $\operatorname{dg}(\mu)$ i $\operatorname{dg}(\nu)$ su topovski ekvivalentne ako i samo ako su multiskupovi $\{\mu_1+1, \mu_2+2, \ldots, \mu_n+n\}$ i $\{\nu_1+1, \nu_2+2, \ldots, \nu_n+n\}$ jednaki.

Teorem 6.6. Broj permutacija $\pi \in S_n$ sa zabranjenim pozicijama iz $P \subseteq \square_n$ je

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k(P)\,(n-k)!.$$