

## Domaća zadaća 8

Napomena:  $A\Delta B$  označava simetričnu razliku skupova.

- Na slučajan način biramo podskupove od  $N = \{1, \dots, n\}$  tako da je izbor svakog od  $2^n$  podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva podskupa  $A, B \subseteq N$ .
  - Kolika je vjerojatnost događaja  $A \cap B = \emptyset$ ?
  - Kolika je vjerojatnost događaja  $A \cup B = N$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $X = |A \cap B|$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $Y = |A \cup B|$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $Z = |A\Delta B|$ ?
- Na slučajan način biramo  $k$ -člane podskupove od  $N = \{1, \dots, n\}$  tako da je izbor svakog od  $\binom{n}{k}$  podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva  $k$ -člana podskupa  $A, B \subseteq N$ .
  - Kolika je vjerojatnost događaja  $A \cap B = \emptyset$ ?
  - Kolika je vjerojatnost događaja  $A \cup B = N$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $X = |A \cap B|$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $Y = |A \cup B|$ ?
  - Koliko je očekivanje slučajne varijable  $Z = |A\Delta B|$ ?
- Na isti način kao u prethodnom zadatku biramo dva  $k$ -člana podskupa  $A, B \subseteq N$ . Neka je  $X_i$  slučajna varijabla koja poprima vrijednost 1 ako je  $i \in A \cap B$ , a 0 inače. Koliko je matematičko očekivanje  $\mathbb{E}(X_i)$ ? Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable  $X = |A \cap B|$  služeći se relacijom  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Izjednačite s izrazom dobivenim u (c) dijelu prethodnog zadatka i izvedite identitet

$$\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} = k \binom{n-1}{k-1}.$$

Na analogni način izvedite kombinatorne identitete iz matematičkog očekivanja slučajnih varijabli  $Y = |A \cup B|$  i  $Z = |A\Delta B|$ .

- Kombinatorno dokažite identitet  $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$ . Iz njega dokažite da je za fiksni  $n$  binomni koeficijent  $\binom{n}{k}$  najveći za  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .
- Dokažite da za svaku presijecajuću familiju  $\mathcal{F}$  podskupova od  $N = \{1, \dots, n\}$  vrijedi  $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ . Jesu li familije koje dostižu nejednakost nužno oblika “svi podskupovi kroz fiksni element”?
- Pokažite primjerom da za  $n = 2k$  postoje presijecajuće familije  $k$ -članih podskupova od  $N = \{1, \dots, n\}$  veličine  $\binom{n-1}{k-1}$  koje nisu oblika “svi  $k$ -člani podskupovi kroz fiksni element”.