Domaća zadaća 7

1. Odredite dimenziju vektorskog prostora gornjetrokutastih matrica $T_n(\mathbb{R})$. Ako je $P = (X, \leq)$ parcijalno uređen skup s $n = |X|$ elemenata, koja je najmanja moguća i najveća moguća dimenzija incidencijske algebre $I(P)$? Za koje se parcijalne uređaje $\leq$ postižu te dimenzije?

2. Nacrtajte Hasseov dijagram Booleove rešetke $B_4 = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$. Kraj svakog vrha $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ označite vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(\emptyset, X)$.

3. Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa djelitelja $D(20)$ i odredite vrijednosti odgovarajuće Möbiusove funkcije $\mu(2, 5)$, $\mu(1, 4)$, $\mu(2, 4)$ i $\mu(2, 20)$. Koja je dimenzija incidencijske algebre $I(D(20))$?

4. U parcijalno uređenom skupu Π_5 particija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ s relacijom profinjenja, zadani su elementi $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ i izračunajte $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

5. Elementi Youngove rešetke $\mathcal{Y}$ su particije prirodnih brojeva. Dvije particije $A = (a_1, \ldots, a_k)$ i $B = (b_1, \ldots, b_m)$ su u relaciji $A \leq B$ ako je $k \leq m$ i vrijedi $a_i \leq b_i$, za $i = 1, \ldots, k$ (tj. ako je Ferrersov dijagram od A podskup Ferrersova dijagrama od B). Neka su $A = (1)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 1, 1) \in \mathcal{Y}$. Nacrtajte Hasseove dijagrame segmenata $[A, B]$ i $[A, C]$ te izračunajte $\mu(A, B)$, $\mu(A, C)$ i $\mu(B, C)$.

6. Odredite kombinatornu interpretaciju vrijednosti $\zeta^2(x, y)$ kvadrata zeta funkcije.

7. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = n$. Nadalje, postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = -n$.

8. Neka je $L_n(F)$ skup svih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem F. Za dva potprostora $X_1, X_2 \leq V$, Grassmannova formula

   $$\dim(X_1 + X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \cap X_2)$$

   je analogon formule uključivanja-isključivanja $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$ za dva konačna skupa S_1 i S_2. Pokažite primjerom da **ne vrijedi** analogna formula

   $$\dim(X_1 + X_2 + X_3) = \sum_{1 \leq i \leq 3} \dim X_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \dim(X_i \cap X_j) + \dim(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$$

   za tri potprostora $X_1, X_2, X_3 \leq V$. Dokažite da jedan smjer nejednakosti ipak vrijedi i generalizirajte nejednakost na m potprostora $X_1, \ldots, X_m \leq V$.

9. Skup $L_n(F)$ je uz inkluziju $\subseteq$ parcijalno uređen skup. Ako je $F = \mathbb{F}_q$ konačno polje reda q, dokažite da je njegova Möbiusova funkcija dana formulom

   $$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^k q^{\binom{k}{2}}, & \text{ako je } X \subseteq Y \text{ i } k = \dim Y - \dim X, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

   Ako je F beskonačno polje (npr. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), je li $L_n(F)$ lokalno konačan?