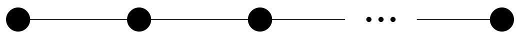
Domaća zadaća 5

1. Za particiju $\mu = (3, 2, 1, 1)$ odredite topovski polinom i sve particije koje su joj topovski ekvivalentne.

2. Dokažite da je ploča $\square_n$ topovski ekvivalentna Ferrersovom dijagramu particije $\mu = (2n - 1, 2n - 3, \ldots, 5, 3, 1)$.

3. Neka je P_n graf s n vrhova i $n - 1$ bridova prikazan na slici:

   Dokažite da je broj k-sparivanja u tom grafu $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$.

4. Izračunajte permanente sljedećih $n \times n$ matrica: jedinična matrica I, matrica J kojoj su svi unosi 1, te matrica $A = [a_{ij}]$ s unosima $a_{ij} = 1$ ako je $i + j$ paran i $a_{ij} = 0$ ako je $i + j$ neparan.

5. Izračunajte polinom sparivanja Petersenova grafa. Koliko u tom grafu ima savršenih sparivanja?

6. Pokažite primjerom da grafovi G_1 i G_2 s različitim brojem vrhova mogu imati isti polinom sparivanja: $M(G_1, x) = M(G_2, x)$. Nasuprot tome, polinom $\mu(G, x)$ jednoznačno određuje broj vrhova grafa G. Dokažite da oba polinoma $M(G, x)$ i $\mu(G, x)$ jednoznačno određuju broj bridova grafa G.

7. Dokažite da karakteristični polinom $\phi(G, x)$ grafa G ne ovisi o numeraciji njegovih vrhova. Stoga i svojstvene vrijednosti matrice susjedstva (nultočke karakterističnog polinoma) ovise samo o grafu, a ne o numeraciji vrhova.