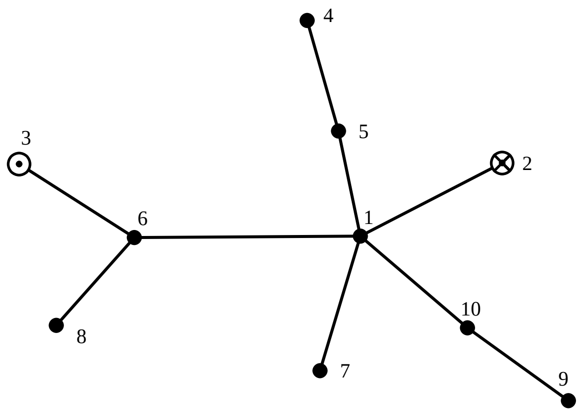
Domaća zadaća 4

1. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici. Glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$.



2. Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara sljedećoj endofunkciji:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

3. Koliko ima permutacija cikličkog tipa $\mu = (5, 2, 2, 2)$?

4. U vektorskom prostoru $V = (\mathbb{F}_q)^n$ nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$ definiramo "skalarni produkt" $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ i "ortogonalni komplement" potprostora $W \leq V$,

$$W^\perp = \{x \in V \mid x \cdot y = 0, \ \ \forall y \in W\}.$$

   (a) Dokažite da je $W^\perp$ potprostor od V.
   (b) Ako je $\dim W = k$, dokažite da je $\dim W^\perp = n - k$.
   (c) Dokažite da je $(W^\perp)^\perp = W$.
   (d) Pokažite primjerom da **ne mora** vrijediti $W \cap W^\perp = \{0\}$.

5. Koristeći se simetrijom q-binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$, izvedite drugi oblik q-Pascalove rekurzije:

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q.$$

6. Kombinatorno dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

7. Dokažite da za neparne $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}_q = 0,$ a za parne $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}_q = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{n-1}).$

8. Dokažite da je $\lim\limits_{q\to 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$.

9. Dokažite formulu $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. Izvedite analognu formulu za $\left[{n \atop n-2} \right]$.

10. Kombinatorno dokažite identitete

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} \quad \text{i} \quad \left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (n-k)! \left[{k \atop m} \right].$$

11. Kombinatorno dokažite identitete

$$\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} \quad \text{i} \quad \left[{n+m+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right].$$