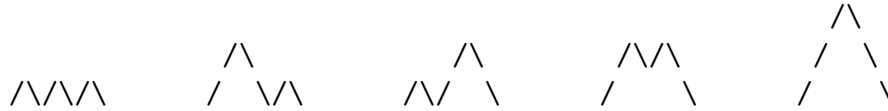


Domaća zadaća 3

- Neka P_n označava broj “planinskih lanaca” koji se mogu nacrtati s n znakova / i n znakova \, a ne silaze ispod početnog nivoa. Na primjer, $P_3 = 5$:



Neka N_n označava broj konfiguracija novčića koje u prvom retku imaju n novčića jedan do drugog, a u svakom sljedećem retku svaki novčić dodiruje dva susjedna novčića iz prethodnog retka. Na primjer, $N_3 = 5$:

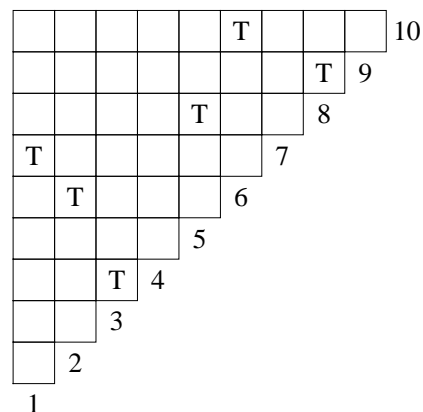
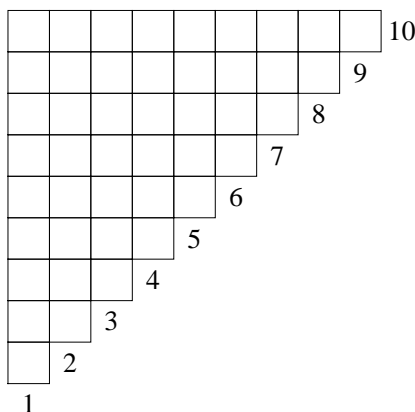


Dokažite da je $P_n = N_n = C_n$ (n -ti Catalanov broj) i pronađite još nekoliko kombinatornih interpretacija Catalanovih brojeva!

- Na koliko načina možemo podijeliti b identičnih bombona među d djece?
- Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ koja zadovoljavaju uvjete $x_i \geq i$, za $i = 1, 2, 3, 4$?
- Odredite konjugiranu particiju od $\mu = (9, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1)$.
- Dokažite binomni teorem za broj surjekcija: za sve $n, x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\text{Sur}(n, x + y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \text{Sur}(n - i, x) \text{Sur}(i, y).$$

- Neka je $X = \{1, \dots, 10\}$. U sliku lijevo ucrtajte raspored topova koji odgovara particiji $\{\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 9\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{10\}\}$ skupa X . Napišite particiju skupa X koja odgovara rasporedu topova na slici desno.



- Definirajte Stirlingove brojeve druge vrste $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Dokažite $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$.
- Neka V_n označava broj particija n -članog skupa u kojima nema jednočlanih blokova. Dokažite da n -ti Bellov broj zadovoljava $B_n = V_n + V_{n+1}$.