

Domaća zadaća 2

1. Dokažite da binomni teorem vrijedi i za padajuće faktorijele:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(Metodom dvostrukog prebrojavanja, slično kao dokaz teorema 1.6 u [skripti](#).)

2. Izveli smo formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ i $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Iz toga slijedi identitet

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

poznat kao *Nikomahov teorem*. Dokažite ga kombinatorno, uspostavljanjem bijekcije između skupa parova $\{(\{a, b\}, \{c, d\}) \mid 0 \leq a, b, c, d \leq n, a \neq b, c \neq d\}$ i skupa četvorki $\{(a, b, c, d) \mid 0 \leq a, b, c < d \leq n\}$.

3. Prikažite x^4 kao linearnu kombinaciju padajućih faktorijskih. Pokušajte naslutiti koeficijente u prikazu potencije x^m kao linearne kombinacije padajućih faktorijskih $x^1, x^2, \dots, x^m$. (Pogledajte sliku na naslovnoj stranici [skripte](#).)

4. Izračunajte sumu $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

5. Metodom parcijalne sumacije izračunajte:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{k=1}^n k \cdot 3^k, & \text{(b)} \sum_{k=1}^n k \cdot F_k, & \text{(c)} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{2^k}, & \text{(d)} \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 2^k, \\ \text{(e)} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)}, & \text{(f)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}, & \text{(g)} \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} H_k, & \text{(h)} \sum_{k=1}^n 2^k \cdot F_k. \end{array}$$

6. Za konstantu c odredite $\Delta(c^x)$. Pomoću tog rezultata izračunajte $\sum_{k=1}^n \frac{(-2)^k}{k}$.

7. Izračunajte dvostruku sumu $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2$.