

Domaća zadaća 11

1. Neka je a_n broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednačbe $x_1 + x_2 + 2x_3 = n$. Napišite funkciju izvodnicu $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ u zatvorenom obliku i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n .
2. Neka je $F(z)$ funkcija izvodnica za broj particija od $n \in \mathbb{N}$ u dijelove koji se ponavljaju najviše dva puta, a $G(z)$ funkcija izvodnica za broj particija od $n \in \mathbb{N}$ u dijelove koji nisu djeljivi s 3. Zapišite $F(z)$ i $G(z)$ kao beskonačne produkte i računanjem u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ dokažite da se podudaraju.
3. Definirajte što znači da beskonačni produkt $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + F_k(z))$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$ i iskažite nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju. Dokažite da je uvjet ispunjen za $F_k(z) = z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}$ i odredite zatvorenu formulu za taj beskonačni produkt. Interpretirajte koeficijente funkcije izvodnice definirane tim produktom kao broj particija od $n \in \mathbb{N}_0$ uz određene uvjete i objasnite zašto smo dobili jednostavnu formulu.
4. Zatvorena formula za funkciju izvodnicu Fibonaccijevih brojeva je $F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$. Ima li $F(z)$ multiplikativni inverz u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$? Odredite njezin multiplikativni inverz u polju formalnih Laurentovih redova $\mathbb{C}((z))$ i zatvorenu formulu za kompozicijski inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$.