

Domaća zadaća 1

1. Koliko ima peteroznamenastih prirodnih brojeva koji su parni i nemaju znamenku 3 na prva dva mjesta?
2. Koliko ima šesteroznamenastih prirodnih brojeva koji su neparni i u zapisu imaju bar jednu znamenku 0?
3. Dokažite da je za $n \geq 2$ broj n -znamenastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka jednak $45 \cdot 10^{n-2}$.
4. Koliko iznosi suma svih n -znamenastih prirodnih brojeva s različitim znamenkama među kojima nije nula?
5. Neka je $|S| = n$ i $|T| = k$. Koliko ima funkcija $f : S \rightarrow T$? Koliko ima injekcija $f : S \rightarrow T$?
6. Dokažite sljedeće tvrdnje.
 - (a) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je injekcija ako i samo ako postoji njezin lijevi inverz, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $g \circ f = id_S$.
 - (b) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je surjekcija ako i samo ako postoji njezin desni inverz, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $f \circ g = id_T$.
 - (c) Funkcija $f : S \rightarrow T$ je bijekcija ako i samo ako postoji njoj inverzna funkcija, tj. funkcija $g : T \rightarrow S$ takva da je $g \circ f = id_S$ i $f \circ g = id_T$.
 - (d) Ako postoji inverzna funkcija od $f : S \rightarrow T$, onda je jedinstvena. To opravdava oznaku $f^{-1} : T \rightarrow S$ za inverznu funkciju.
 - (e) Ako postoji injekcija $f : S \rightarrow T$, onda je $|S| \leq |T|$.
 - (f) Ako postoji surjekcija $f : S \rightarrow T$, onda je $|S| \geq |T|$.
7. Gaussovim trikom dokažite formulu za sumu prvih n neparnih brojeva:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

8. Izvedite formulu za n -ti peterokutni broj p_n .
9. Dokažite da je zbroj svih stupnjeva vrhova grafa $G = (V, E)$ jednak dvostrukom broju bridova:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|.$$

10. Dokažite *lemu o rukovanju*: u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja je paran.