1	2	3	4	5	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - drugi kolokvij, 30.1.2024.

1. (4 boda)

(a) Dokažite sljedeći identitet i primijenite na njega binomnu inverziju:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n\, 2^{n-1}.$$

(b) Prema Stirlingovoj inverziji, za funkcije $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ vrijedi

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} f(k) \iff f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} g(k).$$

Pomoću Stirlingove inverzije dokažite identitet

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = (-1)^n.$$

2. (6 bodova) Neka je $\mathcal{B}_n$ Booleova rešetka, tj. skup svih podskupova od $\{1, \ldots, n\}$ parcijalno uređen inkluzijom $\subseteq$.

(a) Definirajte širinu i visinu konačnog parcijalno uređenog skupa i napišite kolika je širina i visina od $\mathcal{B}_n$ (bez dokazivanja).

(b) Definirajte incidencijsku algebru konačnog parcijalno uređenog skupa i odredite dimenziju incidencijske algebre od $\mathcal{B}_n$. Svoju tvrdnju dokažite!

(c) Pomoću Hallova teorema dokažite formulu za Möbiusovu funkciju od $\mathcal{B}_n$:

$$\mu(X, Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y \setminus X|}, & \text{ako je } X \subseteq Y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

3. (5 bodova) Definirajte presijecajuću familiju te iskažite i dokažite Erdős-Ko-Radov teorem. Opišite primjer presijecajuće familije koja dostiže ocjenu iz teorema. Za $n = 4$ i $k = 2$ nađite dva bitno različita primjera, koji se ne mogu prevesti jedan u drugi permutacijom točaka.

4. (5 bodova) Neka je a_n broj n-kombinacija multiskupa $M = \{a^\infty, b^\infty, c^\infty, d, e\}$ koji sadrže element a parno mnogo puta i element b neparno mnogo puta. Na element c nema ograničenja, a elemente d i e sadrže najviše jednom jer im je multiciplitet u M jednaki 1. Zapišite funkciju izvodnicu niza (a_n) u zatvorenom obliku i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n.

5. (5 bodova) Neka je $F(z)$ funkcija izvodnica za broj particija od $n \in \mathbb{N}$ u dijelove koji se ponavljaju najviše dva puta, a $G(z)$ funkcija izvodnica za broj particija od $n \in \mathbb{N}$ u dijelove koji nisu djeljivi s 3. Zapišite $F(z)$ i $G(z)$ kao beskonačne produkte i računanjem u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ dokažite da se podudaraju.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac