1	2	3	4	5	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - prvi kolokvij, 22.11.2023.

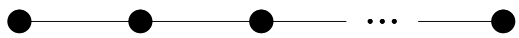
1. (5 bodova) Metodom parcijalne sumacije izračunajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k}$.

2. (5 bodova) Definirajte particiju prirodnog broja i njezinu duljinu. Neka je $p(n,k)$ broj particija od $n \in \mathbb{N}$ duljine k. Dokažite da za $k < n$ vrijedi

$$p(n,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n-k,i).$$

3. (4 boda) Definirajte topovski polinom i topovsku ekvivalenciju particija $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ i $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ prirodnog broja n. Dokažite: μ i ν su topovski ekvivalentne ako i samo ako su multiskupovi $\{\mu_1 + 1, \mu_2 + 2, \ldots, \mu_n + n\}$ i $\{\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \ldots, \nu_n + n\}$ jednaki.

4. (5 bodova) Neka je P_n graf s n vrhova i $n-1$ bridova prikazan na slici:



Definirajte sparivanje i odredite ukupan broj sparivanja u grafu P_n (bilo kojeg kardinaliteta). Dopušta li taj graf savršeno sparivanje?

5. (6 bodova)

(a) Koliko ima permutacija $\pi : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ takvih da je $M(i, \pi(i)) = 1$, $\forall i \in \{1,2,3,4,5\}$? Pritom je $M(a,b)$ najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva a i b.

(b) Koliko ima rasporeda $2n$ nenapadajućih topova na kvadratnoj ploči $\square_{2n}$ takvih da niti jedan top nije na gornjem lijevom "trokutu" $\Delta_n = \mathrm{dg}(n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$? Odgovor zapišite u obliku sume, prebrojavanjem permutacija sa zabranjenim pozicijama. Zatim direktno prebrojite rasporede, postavljanjem topova odozgo prema dolje. Izjednačite rezultate i izvedite kombinatorni identitet!

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, PRVI KOLOKVIJ, 22.11.2023.

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2^k} = \sum_{1}^{n+1} x^{\underline{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x \delta x = \left| \begin{matrix} f(x)=x^{\underline{2}} & \Delta f(x)=2x & \\ \Delta g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x & g(x)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^x & Eg(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x \end{matrix} \right|$$

$$= x^{\underline{2}}\cdot(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_1^{n+1} - \sum_{1}^{n+1} 2x\cdot(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^x \delta x = \left| \begin{matrix} f(x)=x & \Delta f(x)=1 \\ \Delta g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x & \dots \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{(n+1)n\cdot(-2)}{2^{n+1}} + 2\left[x\cdot(-2)\left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_1^{n+1} - \sum_{1}^{n+1} (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^x \delta x \right] =$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2^n} + 2\left[-\frac{n+1}{2^n} + 1 + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_1^{n+1} \right]$$

$$-\frac{n^2+n+2n+2}{2^n} + 2 - 4\left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\right] = 4 - \frac{n^2+3n+4}{2^n}$$

2. Dokažite da za $k<n$ vrijedi $p(n,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n-k, i)$.

Rješenje 1. $p(n,k)$ je broj particija od $n \in \mathbb{N}$ duljine k, ali transponiranjem Ferrersovih dijagrama vidimo da je jednak broju particija od $n \in \mathbb{N}$ kojima je najveći pribrojnik k. Ako maknemo taj pribrojnik, ostaje particija od $n-k$ kojima su pribrojnici $\leq k$, a broj takvih particija je jednak broju particija od $n-k$ duljine najviše k: $\sum_{i=1}^{n} p(n-k, i)$.

Rješenje 2. Pridruživanje $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \mapsto (\mu_1 - 1, \ldots, \mu_k - 1)$ je bijekcija sa skupa svih particija od $n \in \mathbb{N}$ duljine k na skup svih particija od $n-k$ duljine najviše k. Ako je broj jedinica u $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ jednak $k-i$, onda je duljina pridružene particije i. Broj particija u kodomeni je $\sum_{i=1}^{k} p(n-k, i)$.

Rješenje 3. Na predavanju smo dokazali $p(n,k) = p(n-k,k) + p(n-1, k-1)$. Iteriranjem ili indukcijom slijedi $p(n,k) = p(n-k,k) + p(n-1,k-1) = p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + p(n-2,k-2) = p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + p(n-k,k-2) + p(n-3,k-3) = \ldots$

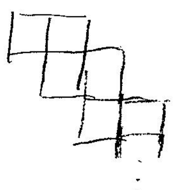
$$\ldots = \sum_{i=1}^{k} p(n-k, i)$$

3. Teorem 5.4 u skripti.

4. Graf P_n dopušta savršeno sparivanje ako i samo ako je n paran.

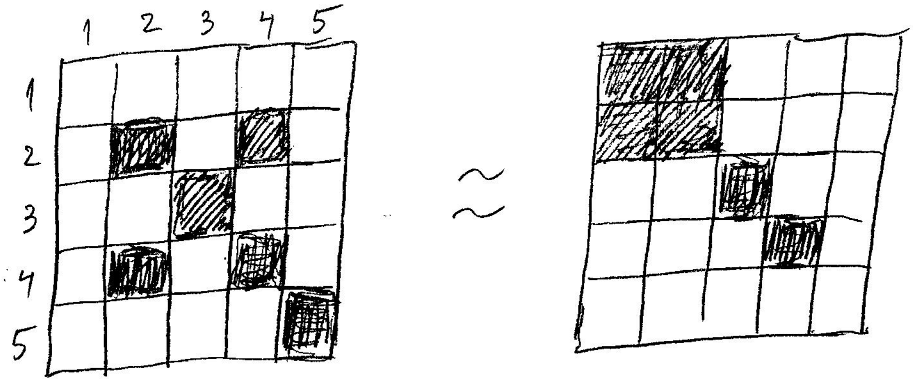
<u>Rješenje 1.</u> Neka je p_n ukupan broj sparivanja u grafu P_n. Ako podijelimo skup svih sparivanja na one koji zasićuju / ne zasićuju prvi vrh, vidimo da vrijedi rekurzija $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$. Početni uvjeti su $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, pa slijedi da je $p_n = F_{n+1}$ ($(n+1)$.-vi Fibonaccijev broj).

<u>Rješenje 2.</u> k-sparivanja grafa P_n odgovaraju nizovima od k jedinica i $n-1-k$ nula u kojima nema susjednih jedinica, ili popločavanjima $1 \times n$ pravokutnika s k „domina"  i $n-2k$ „kvadratića" , ili rasporedu k topova koji se ne napadaju na ploču oblika



($n-1$ polja). „Principom kuglica i štapića" vidimo da takvih objekata ima $\binom{n-k}{k}$, pa je ukupan broj sparivanja $\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$.

5. a)



$$R_P(x) = (1+4x+2x^2)(1+x)^2 = 1+6x+11x^2+8x^3+2x^4$$

Broj permutacija sa zabranjenim pozicijama iz P:

$$1\cdot 5! - 6\cdot 4! + 11\cdot 3! - 8\cdot 2! + 2\cdot 1! = 28$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left\{ n \atop n-k \right\} (2n-k)! = (n+1)^n \cdot n!$$