Domaća zadaća 5

1. Za particiju $\mu = (3, 2, 1, 1)$ odredite topovski polinom i sve particije koje su joj topovski ekvivalentne.

2. Dokažite da je ploča $\square_n$ topovski ekvivalentna Ferrersovom dijagramu particije $\mu = (2n-1, 2n-3, \ldots, 5, 3, 1)$.

3. Izračunajte polinom sparivanja Petersenova grafa. Koliko u tom grafu ima savršenih sparivanja?

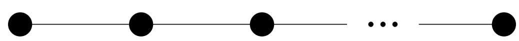
4. Dokažite da karakteristični polinom $\phi(G, x)$ grafa G ne ovisi o numeraciji njegovih vrhova. Zato i nultočke karakterističnog polinoma, tj. svojstvene vrijednosti matrice susjedstva, ovise samo o grafu. Zovemo ih *svojstvenim vrijednostima grafa G.*

5. Pokažite primjerom da grafovi G_1 i G_2 s različitim brojem vrhova mogu imati isti polinom sparivanja $M(G_1, x) = M(G_2, x)$. Dokažite da oba polinoma $M(G, x)$ i $\mu(G, x)$ jednoznačno određuju broj bridova grafa G.

6. Neka je G graf s n vrhova i e bridova u kojem je i-ti vrh stupnja d_i. Dokažite da je $m_2(G) = \binom{e}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$. Dokažite da iz polinoma sparivanja $\mu(G, x)$ možemo ustanoviti je li graf G regularan, tj. vrijedi li $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$.

7. Potpun graf K_n ima n vrhova i $\binom{n}{2}$ bridova (svaka dva vrha su susjedna). Dokažite da je broj k-sparivanja u K_n jednak $m_k(K_n) = \dfrac{n^{\underline{2k}}}{k!\, 2^k}$.

8. Neka je P_n graf s n vrhova i $n-1$ bridova prikazan na slici:

   Dokažite da je broj k-sparivanja u tom grafu $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$.

9. Izvedite rekurziju za polinom sparivanja $M(P_n, x)$.