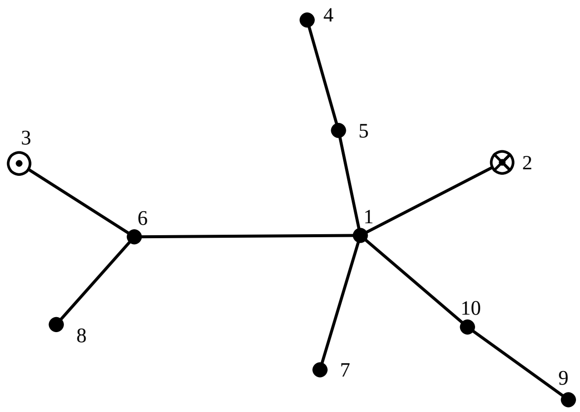
Domaća zadaća 4

1. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici. Glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$.



2. Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara sljedećoj endofunkciji:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

3. Koliko ima permutacija cikličkog tipa $\mu = (5, 2, 2, 2)$?

4. Za elemente g_1 i g_2 grupe G kažemo da su *konjugirani* ako postoji $h \in G$ takav da je $g_2 = hg_1h^{-1}$. Dokažite: permutacije π_1 i π_2 iz simetrične grupe S_n su konjugirane ako i samo ako su istog cikličkog tipa.

5. Dokažite formulu $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. Izvedite analognu formulu za $\left[{n \atop n-2} \right]$.

6. Kombinatorno dokažite identitete

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} \quad \text{i} \quad \left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (n-k)! \left[{k \atop m} \right].$$

7. Kombinatorno dokažite identitete

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \binom{k}{m} = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop m} \right\} \left\{ {n-j \atop k-m} \right\} \quad \text{i} \quad \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m} = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} \left[{j \atop m} \right] \left[{n-j \atop k-m} \right].$$

8. Kombinatorno dokažite identitete

$$\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} \quad \text{i} \quad \left[{n+m+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right].$$

9. Lahov[1] broj ili "Stirlingov broj treće vrste" $L(n,k)$ je broj načina na koji možemo elemente n-članog skupa podijeliti u k totalno uređenih podskupova. Redoslijed podskupova nije bitan, ali je redoslijed elemenata unutar podskupova bitan. Na primjer, za $n=4$ i $k=2$ sve moguće podjele su

$$\begin{array}{ccccccc}
\{1,234\} & \{2,134\} & \{3,124\} & \{4,123\} & \{12,34\} & \{13,24\} & \{14,23\} \\
\{1,243\} & \{2,143\} & \{3,142\} & \{4,132\} & \{12,43\} & \{13,42\} & \{14,32\} \\
\{1,324\} & \{2,314\} & \{3,214\} & \{4,213\} & \{21,34\} & \{31,24\} & \{41,23\} \\
\{1,342\} & \{2,341\} & \{3,241\} & \{4,231\} & \{21,43\} & \{31,42\} & \{41,32\} \\
\{1,423\} & \{2,413\} & \{3,412\} & \{4,312\} & & & \\
\{1,432\} & \{2,431\} & \{3,421\} & \{4,321\} & & &
\end{array}$$

i vrijedi $L(4,2) = \binom{4}{1} \cdot 1! \cdot 3! + \frac{1}{2}\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 2! = 36$.

(a) Dokažite formulu $L(n,k) = \dfrac{n!}{k!}\dbinom{n-1}{k-1}$.

(b) Dokažite rekurziju $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$.

(c) Izvedite koeficijente prijelaza iz baze rastućih faktorijela $\mathcal{R}$ u bazu padajućih faktorijela $\mathcal{P}$.

[1] Ivo Lah (1896.–1979.), slovenski matematičar i aktuar.