Domaća zadaća 2

1. Dokažite da binomni teorem vrijedi i za padajuće faktorijele:
$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{n-k}} y^{\underline{k}}.$$
(Metodom dvostrukog prebrojavanja, slično kao dokaz teorema 1.6 u skripti.)

2. Izveli smo formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ i $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Iz toga slijedi identitet
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$
poznat kao *Nikomahov teorem*. Dokažite ga kombinatorno, uspostavljanjem bijekcije između skupa parova $\{(\{a,b\},\{c,d\}) \mid 0 \le a,b,c,d \le n, a \ne b, c \ne d\}$ i skupa četvorki $\{(a,b,c,d) \mid 0 \le a,b,c < d \le n\}$.

3. Prikažite x^4 kao linearnu kombinaciju padajućih faktorijela. Pokušajte naslutiti koeficijente u prikazu potencije x^m kao linearne kombinacije padajućih faktorijela $x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{m}}$. (Pogledajte sliku na naslovnoj stranici skripte.)

4. Izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

5. Metodom parcijalne sumacije izračunajte:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot F_k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2^k}$, (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k$,

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$, (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$, (g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} H_k$, (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot F_k$.

6. Za konstantu c odredite $\Delta(c^{\underline{x}})$. Pomoću tog rezultata izračunajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}$.

7. Izračunajte dvostruku sumu $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)^2$.