

Domaća zadaća 11

1. Neka je d_n broj deranžmana stupnja n , tj. permutacija bez fiksne točke. Kombinatorno dokažite formulu $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$. Iz nje binomnom inverzijom izvedite formulu za d_n .
2. Dokažite identitet $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = n(n+1)2^{n-2}$. Napišite identitet dobiven binomnom inverzijom iz tog identiteta.
3. Dokažite da Fibonaccijevi brojevi zadovoljavaju identitet $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$. Napišite identitet dobiven binomnom inverzijom iz tog identiteta.
4. Neka je a_n broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + 2x_3 = n$. Napišite funkciju izvodnicu $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ u zatvorenom obliku i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n .
5. Dokažite da je broj particija od n u dijelove koji se ponavljaju najviše tri puta jednak broju particija od n u kojima se parni dijelovi ponavljaju najviše jednom, a na neparne dijelove nema ograničenja.
6. Za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum_{n \geq 0} n z^n$ odredite multiplikativni inverz u polju $\mathbb{C}((z))$ i kompozicijski inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$.
7. Odredite koeficijente multiplikativnog i kompozicijskog inverza funkcije izvodnice $F(z) = z \cdot (1 - z)^m$, $m \in \mathbb{N}$.
8. Odredite koeficijent uz z^{2021} funkcije izvodnice $f \in \mathbb{C}[[z]]$ koja zadovoljava jednadžbu $f(z) - 2z \cdot f(z)^5 = 4z$.
9. U prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ riješite kubnu jednadžbu $2z + 4f(z)^2 = f(z) + 4f(z)^3$, tj. odredite koeficijente funkcije izvodnice $f(z)$ koja zadovoljava tu jednadžbu.
10. U prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ riješite kubnu jednadžbu $f(z)^3 + f(z) = z$.
11. U prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ riješite jednadžbu četvrtog stupnja $f(z)^4 - f(z) + z = 0$.
12. Odredite koeficijente funkcije izvodnice $W \in \mathbb{C}[[z]]$ koja zadovoljava jednadžbu $W(z)e^{W(z)} = z$. To je takozvana Lambertova funkcija.