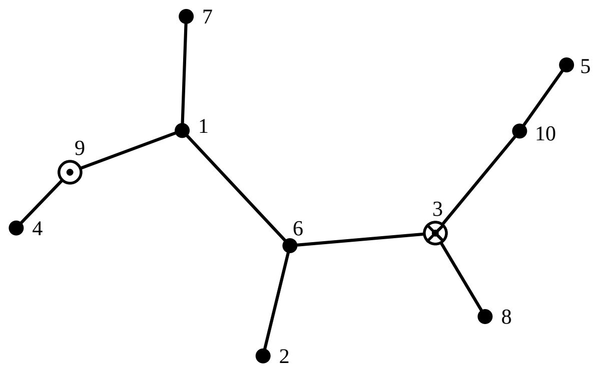
1	2	3	4	5	6	Σ

Matični Broj

Ime i Prezime

Kombinatorika - popravni kolokvij, 17.2.2023.

1. (10 bodova) Definirajte pojam “kralježnjaka” iz Joyalova bijektivnog dokaza Cayleyeve formule. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici lijevo (glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$). Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara endofunkciji desno.



$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 1 & 3 & 9 & 2 & 5 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{array}$$

2. (10 bodova) Neka je $P \subseteq \square_n = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}$. Napišite i dokažite formulu za broj permutacija $\pi \in S_n$ takvih da $(i,\pi(i)) \notin P$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

3. (12 bodova) Neka je $P = (X,\leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup. Definirajte množenje elemenata incidencijske algebre $I(P)$ i elemente $\delta,\zeta,\mu \in I(P)$. Neka je element $\chi \in I(P)$ definiran s

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x < y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokažite da je $2\delta - \zeta$ invertibilni element incidencijske algebre $I(P)$ i vrijedi

$$(2\delta - \zeta)^{-1} = \delta + \chi + \chi^2 + \chi^3 + \chi^4 + \ldots$$

Za $x,y \in X$ kombinatorno interpretirajte vrijednost $(2\delta - \zeta)^{-1}(x,y)$.

4. (12 bodova) Neka su $r,s \geq 2$. Dokažite da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da u svakom bojanju bridova potpunog grafa K_n u crvenu ili plavu postoji crveni podgraf K_r ili plavi podgraf K_s. Definirajte Ramseyev broj $R(r,s)$ i dokažite ocjenu $R(k,k) < 4^{k-1}$.

5. (12 bodova) Neka je a_n broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + 2x_2 = n$. Napišite funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ u zatvorenom obliku i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n.

Uputa. Koeficijent uz z^n izračunajte rastavljanjem $F(z)$ na parcijalne razlomke. Formulu za a_n treba zapisati bez znaka sume!

6. (14 bodova) Definirajte pojam *sparivanja* u grafu. Neka je T_n ukupan broj sparivanja u potpunom grafu K_n.

(a) Dokažite da vrijedi rekurzija $T_n = T_{n-1} + (n-1) \cdot T_{n-2}$, $T_0 = T_1 = 1$.

(b) Koristeći se rekurzijom izvedite zatvorenu formulu za eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{T_n}{n!} z^n$.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac