1	2	3	4	5	6	Σ

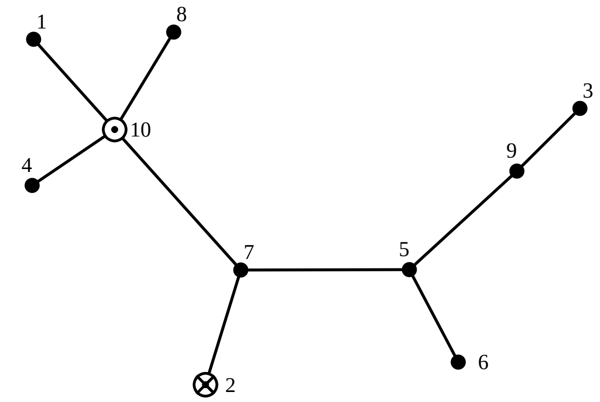
MATIČNI BROJ　　　　IME I PREZIME

Kombinatorika - prvi kolokvij, 23.11.2022.

1. (6 bodova) Sumu $\sum_{k=1}^{n-1} k^m$ moguće je zapisati kao polinom stupnja $m+1$ u varijabli n. Odredite koeficijente tog polinoma!

Uputa. Zapišite k^m u bazi padajućih faktorijela, primijenite diskretnu Newton-Leibnizovu formulu i vratite padajuće faktorijele u standardnu bazu $\{1, n, n^2, \ldots\}$. Koeficijente zapišite kao sumu koja uključuje Stirlingove brojeve prve i druge vrste (ne treba je "sređivati").

2. (6 bodova) Definirajte pojam "kralježnjaka" iz Joyalova bijektivnog dokaza Cayleyeve formule. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici lijevo (glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$). Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara endofunkciji desno.



$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{array}$$

3. (6 bodova) Definirajte Stirlingov broj prve vrste $\left[{n \atop k}\right]$. Dokažite da je broj rasporeda k "slabih topova" na ploči Δ_n jednak $\left[{n \atop n-k}\right]$.

4. (6 bodova) Kombinatorno dokažite da za $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k}\right] = 0.$$

5. (5 bodova) Koliko ima podskupova od $\{1, 2, \ldots, 6n\}$ koji sadrže bar jedan paran broj i bar jedan broj djeljiv s 3? Brojevi ne moraju biti različiti, npr. podskup $\{6\}$ zadovoljava uvjet.

6. (6 bodova) Definirajte permanentu $n \times n$ matrice. Izračunajte permanentu jedinične matrice I_n, matrice J_n kojoj su svi unosi jedinice te matrice $A_n = [a_{ij}]$ s unosima $a_{ij} = 1$ ako je $i+j$ paran i $a_{ij} = 0$ ako je $i+j$ neparan.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac

1	2	3	4	5	6	Σ

Matični Broj

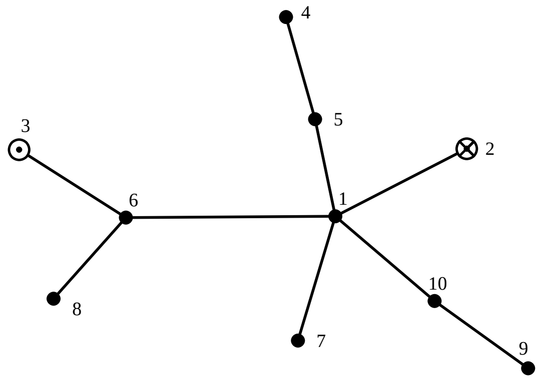
Ime i Prezime

Kombinatorika - prvi kolokvij, 23.11.2022.

1. (6 bodova) Sumu $\sum_{k=1}^{n-1} k^m$ moguće je zapisati kao polinom stupnja $m+1$ u varijabli n. Odredite koeficijente tog polinoma!

Uputa. Zapišite k^m u bazi padajućih faktorijela, primijenite diskretnu Newton-Leibnizovu formulu i vratite padajuće faktorijele u standardnu bazu $\{1, n, n^2, \ldots\}$. Koeficijente zapišite kao sumu koja uključuje Stirlingove brojeve prve i druge vrste (ne treba je "sređivati").

2. (6 bodova) Definirajte pojam "kralježnjaka" iz Joyalova bijektivnog dokaza Cayleyeve formule. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici lijevo (glava je označena s $\otimes$, a rep s $\odot$). Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara endofunkciji desno.



$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 3 & 6 & 9 & 1 & 8 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

3. (6 bodova) Definirajte Stirlingov broj prve vrste $\left[{n \atop k}\right]$. Dokažite da je broj rasporeda k "slabih topova" na ploči Δ_n jednak $\left[{n \atop n-k}\right]$.

4. (6 bodova) Kombinatorno dokažite da za $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0.$$

5. (5 bodova) Koliko ima podskupova od $\{1, 2, \ldots, 6n\}$ koji sadrže bar jedan paran broj i bar jedan broj djeljiv s 3? Brojevi ne moraju biti različiti, npr. podskup $\{6\}$ zadovoljava uvjet.

6. (6 bodova) Definirajte permanentu $n \times n$ matrice. Izračunajte permanentu jedinične matrice I_n, matrice J_n kojoj su svi unosi jedinice te matrice $A_n = [a_{ij}]$ s unosima $a_{ij} = 1$ ako je $i + j$ paran i $a_{ij} = 0$ ako je $i + j$ neparan.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac

KOMBINATORIKA, PRVI KOLOKVIJ, 23.11.2022.

(1.) Sumu $\sum_{k=1}^{n-1} k^m$ moguće je zapisati kao polinom stupnja $m+1$ u varijabli n. Odredite koeficijente tog polinoma!

Rj:
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} k^i = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} \sum_{k=1}^{n-1} k^i =$$

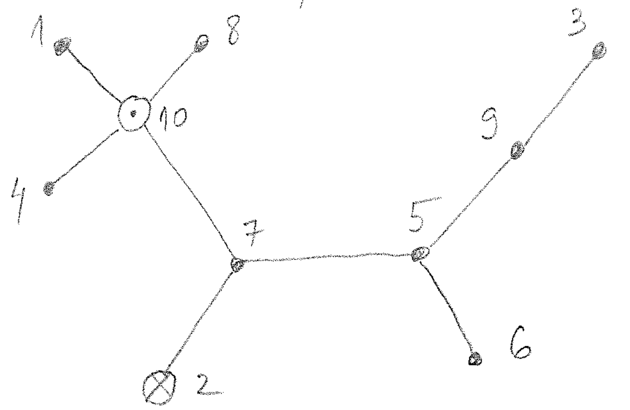
$$= \sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} \sum_{1}^{n} x^i \, dx = \sum_{i=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} \frac{x^{i+1}}{i+1} \Big|_1^n = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i+1} \left\{ \begin{matrix} m \\ i \end{matrix} \right\} n^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} \left\{ \begin{matrix} m \\ i-1 \end{matrix} \right\} n^i = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} \left\{ \begin{matrix} m \\ i-1 \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \left[\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right] n^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} \left\{ \begin{matrix} m \\ i-1 \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{i-j} \left[\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right] n^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{m+1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m+1} \frac{(-1)^{i-j}}{i} \left\{ \begin{matrix} m \\ i-1 \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right] \right)}_{\text{Traženi koeficijent}} n^j$$

2. Definirajte pojam „kralježnjak" iz Joyalova bijektivnog dokaza Cayleyeve formule. Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici (glava je ⊗, a rep ⊙):



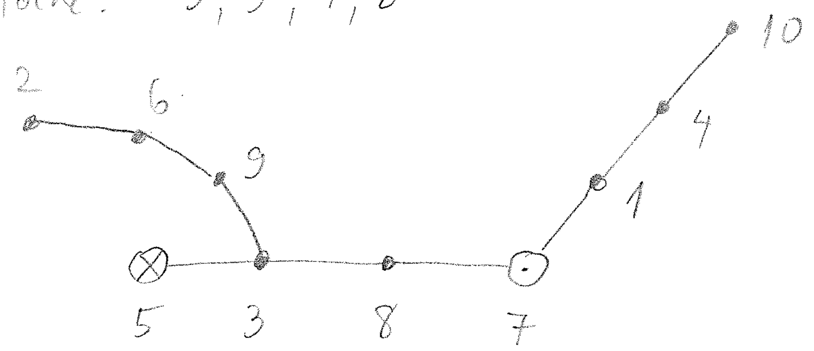
kralježnica:	2	7	10	Ostali vrhovi:	1	3	4	5	6	8	9
	2	7	10		10	9	10	7	5	10	5

Endofunkcija: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 2 & 9 & 10 & 7 & 5 & 7 & 10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

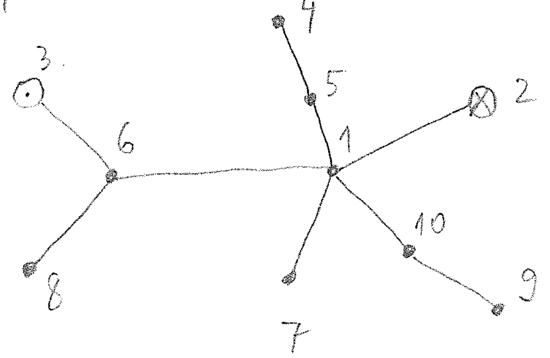
Nacrtajte kralježnjak koji odgovara endofunkciji

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Periodične točke: 3, 5, 7, 8



2.) Definirajte pojam „kraljičnjaka" iz Joyalova bijektivnog dokaza Cayleyeve formule. Zapišite endofunkciju koja odgovara kraljičnjaku na slici (glava je označena s ⊗, a rep s ⊙):



Kralježnica:

1	2	3	6
2	1	6	3

Ostali vrhovi:

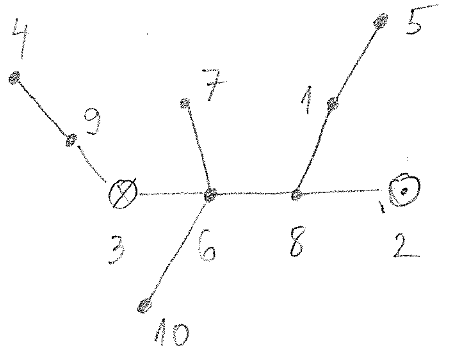
3	8	4	5	7	9	10
6	6	5	1	1	10	1

Endofunkcija: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 1 & 3 & 1 & 6 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

Nacrtajte kraljičnjaka koji odgovara endofunkciji

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 3 & 6 & 9 & 1 & 8 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Periodične točke: 2, 3, 6, 8



(4.) Kombinatorno dokažite da za $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$$

Rj:

Ekvivalentna formula: $\underbrace{\sum_{i \geq 1} \begin{bmatrix} n \\ 2i \end{bmatrix}}_{\text{Broj permutacija stupnja } n \text{ s parnim brojem ciklusa}} = \underbrace{\sum_{i \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ 2i+1 \end{bmatrix}}_{\text{Broj permutacija stupnja } n \text{ s neparnim brojem ciklusa}}$

$\mathcal{P} = \{ \pi \in S_n \mid \pi$ ima paran broj ciklusa $\}$

$\mathcal{N} = \{ \pi \in S_n \mid \pi$ ima neparan broj ciklusa $\}$

Definiramo bijekciju $f : S_n \to S_n$ na sljedeći način.

Za $n \geq 2$ i $\pi \in S_n$, elementi 1 i 2 se pojavljuju u istom ciklusu od π ili u različitim ciklusima od π.

U prvom slučaju π je oblika

$$\pi = (1\ a_1 \cdots a_i\ 2\ b_1 \cdots b_j)(c_1\ c_2 \cdots) \cdots$$

Neka je $f(\pi)$ permutacija s jednim ciklusom više

$$f(\pi) = (1\ a_1 \cdots a_i)(2\ b_1 \cdots b_j)(c_1\ c_2 \cdots) \cdots$$

U drugom slučaju π je oblika $\pi = (1\ a_1 \cdots a_i)(2\ b_1 \cdots b_j)(c_1\ c_2 \cdots) \cdots$ i definiramo $f(\pi)$ kao permutaciju s jednim ciklusom manje:

$$f(\pi) = (1\ a_1 \cdots a_i\ 2\ b_1 \cdots b_j)(c_1\ c_2 \cdots) \cdots$$

Funkcija f je sama sebi inverzna, pa je bijekcija i vrijedi $f(\mathcal{P}) = \mathcal{N}$, $f(\mathcal{N}) = \mathcal{P}$. Zato je $|\mathcal{P}| = |\mathcal{N}|$.

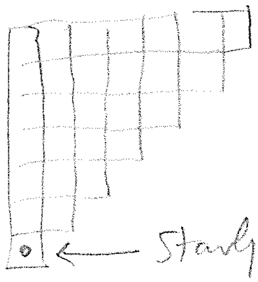
(4.) <u>Drugi dokaz</u>. Recimo da je n paran broj

$$\sum_{i \geq 1} \left[{n \atop 2i} \right] = \text{broj načina za postaviti paran broj topova na ploču } \Delta_n$$

$$\sum_{i \geq 0} \left[{n \atop 2i+1} \right] = \text{broj načina za postaviti neparan broj topova na ploču } \Delta_n$$

Ako je n neparan, onda je obrnuto

Uspostavimo bijekciju između skupa svih rasporeda parnog broja topova i skupa svih rasporeda neparnog broja topova na Δ_n



Stavljanje / micanje topa na ovo polje

<u>Treći dokaz</u>. Relacija $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$ (teorem 4.10 iz skripte) može se dokazati kombinatorno, prebrojavanjem rasporeda n slabih topova na proširenoj ploči $\Delta_n(x)$. Uvrštavanjem $x = -1$ dobivamo relaciju $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] = (-1)^{\overline{n}} = (-1) \cdot 0 \cdots = 0$

5. Koliko ima podskupova od $\{1,2,\dots,6n\}$ koji sadrže bar jedan paran broj i bar jedan broj djeljiv s 3? Brojevi ne moraju biti različiti, npr. podskup $\{6\}$ zadovoljava uvjet.

Rj. $S = \{1,2,\dots,6n\}$, $|S| = 6n$

$N = \{1,3,\dots 6n-1\}$ (skup brojeva koji nisu parni), $|N| = 3n$

$T = \{1,2,4,5,\dots,6n-2,6n-1\}$ (skup brojeva koji nisu djeljivi s 3), $|T| = 4n$

$N \cap T = \{i \in S \mid i \equiv 1 \text{ ili } 5 \pmod 6\}$ (skup brojeva koji nisu parni niti su djeljivi s 3), $|N \cap T| = 2n$

Po FUI, traženi skup ima

$$|2^S| - |2^N| - |2^T| + |2^{N \cap T}| =$$

$$= 2^{6n} - 2^{3n} - 2^{4n} + 2^{2n} \text{ elemenata.}$$

6. Definirajte permanentu $n\times n$ matrice. Izračunajte $\operatorname{per} I_n$, $\operatorname{per} J_n$, $\operatorname{per} A_n$, $A_n=[a_{ij}]$,

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ako je } i+j \text{ paran}\\ 0, & \text{ako je } i+j \text{ neparan}\end{cases}$$

Rj.: $\operatorname{per}[a_{ij}]=\sum_{\pi\in S_n} a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}$

Očito je $\operatorname{per} I_n=1$ i $\operatorname{per} J_n=n!$

$$A_n=\begin{bmatrix}0&1&0&1&\cdots\\1&0&1&0&\cdots\\0&1&0&1&\cdots\\1&0&1&0&\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1&\cdots&1\\\vdots&&&\vdots&&\\0&\cdots&0&1&\cdots&1\\1&\cdots&1&0&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{per} A_n=\begin{cases}\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2, & \text{za } n \text{ paran}\\ \left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n+1}{2}\right)!, & \text{za } n \text{ neparan}\end{cases}$$