1	2	3	4	5	6	7	Σ

Matični Broj ______________ Ime i Prezime ______________

Kombinatorika - popravni kolokvij, 10.2.2020.

1. (3+3+3 bodova) Imamo 10 kovanica od jednu kunu, 15 kovanica od dvije kune i 7 kovanica od pet kuna. Kovanice iste vrijednosti smatramo identičnima.

(a) Na koliko načina možemo sve kovanice složiti u niz?

(b) Na koliko načina možemo izabrati podskup od 6 kovanica bilo koje vrijednosti?

(c) Napišite funkciju izvodnicu za broj načina na koji možemo platiti račun od n kuna s tim kovanicama.

2. (10 bodova) Neka F_k označava k-ti Fibonaccijev broj. Metodom parcijalne sumacije izračunajte

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot F_k.$$

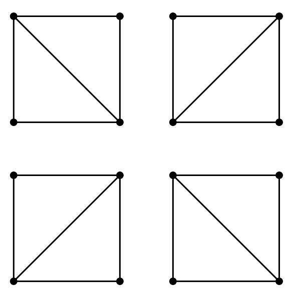
3. (10 bodova) Definirajte Stirlingove brojeve druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Kombinatorno dokažite identitet

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \binom{k}{m} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop m} \right\} \left\{ {n-j \atop k-m} \right\}.$$

4. (10 bodova) Definirajte sparivanje u grafu G i "matching polinom" $M(G,x)$. Dokažite

$$M(G \dot\cup H, x) = M(G,x) \cdot M(H,x),$$

pri čemu $G \dot\cup H$ označava disjunktnu uniju grafova. Izračunajte $M(G,x)$ za graf na slici desno.



5. (3+4+3 bodova) Neka je $N = \{1,2,3\}$ i $\{A_1, A_2, A_3\}$ familija podskupova konačnog skupa X.

(a) Definirajte skupove A_I i X_I za $I \subseteq N$. Nacrtajte Vennov dijagram i označite na njemu skupove A_I i X_I za $I = \{1,2\}$.

(b) Funkcija $f : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ zadana je s $f(\emptyset) = 1$, $f(\{1\}) = f(\{2\}) = 1$, $f(\{3\}) = 2$, $f(\{1,2\}) = 2$, $f(\{1,3\}) = f(\{2,3\}) = 3$ i $f(\{1,2,3\}) = 4$. Ispišite sve vrijednosti funkcije $g : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, $g(I) = \sum_{J\subseteq I} f(J)$ i provjerite Möbiusovu formulu inverzije $f(I) = \sum_{J\subseteq I}(-1)^{|I\setminus J|}g(J)$ za $I = \{1,3\}$ i $I = \{1,2,3\}$.

(c) Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{P}(N), \subseteq)$ i ispišite vrijednosti Möbiusove funkcije $\mu(\emptyset, I)$ za sve $I \in \mathcal{P}(N)$.

6. (10 bodova) Na koliko načina Ana, Branko, Cvjeta, Dora, Emil, Filip i Goran mogu stati u red tako da Ana i Branko nisu na početku niti na kraju reda, a Cvjeta, Dora i Filip nisu u sredini reda?

7. (3+4+4 bodova)

(a) Neka je $F(z) = z \cdot (1-z)^m$, za $m \in \mathbb{N}$. Odredite koeficijente a_n u razvoju

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

(b) Ima li $F(z)$ multiplikativni inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$? Odredite koeficijente b_n multiplikativnog inverza

$$G(z) = \sum_{n\geq -1} b_n z^n$$

od $F(z)$ u polju $\mathbb{C}((z))$ i napišite njihovu kombinatornu interpretaciju.

(c) Neka je $H(z) = F^{(-1)}(z)$ kompozicijski inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$. Pomoću Lagrangeove formule inverzije odredite koeficijente c_n u razvoju

$$H(z) = \sum_{n\geq 1} c_n z^n.$$

Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac