

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$

---

MATIČNI BROJ

IME I PREZIME

## Kombinatorika - prvi kolokvij, 18.11.2019.

- (5 bodova)** Za funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirajte  $\Delta f(x)$  i neodređenu sumu  $\sum f(x) \delta x$ . Iskažite i dokažite diskretni Newton-Leibnizov teorem.
- (6 bodova)** Neka  $F_k$  označava  $k$ -ti Fibonaccijev broj. Metodom parcijalne sumacije izračunajte

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{2^k}.$$

- (6 bodova)** Neka  $\text{Sur}(n, k)$  označava broj surjeksija sa  $n$ -članog na  $k$ -člani skup. Dokažite da sve  $x, y \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$\text{Sur}(n, x + y) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \text{Sur}(n - i, x) \text{Sur}(i, y).$$

- (6 bodova)** Definirajte Stirlingov broj prve vrste  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ . Kombinatorno dokažite identitet

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] \binom{k}{m} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left[ \begin{smallmatrix} j \\ m \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} n - j \\ k - m \end{smallmatrix} \right].$$

- (6 bodova)** Definirajte topovski polinom i topovsku ekvivalenciju particija  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  i  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  prirodnog broja  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažite:  $\mu$  i  $\nu$  su topovski ekvivalentne ako i samo ako su multiskupovi  $\{\mu_1 + 1, \mu_2 + 2, \dots, \mu_n + n\}$  i  $\{\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \dots, \nu_n + n\}$  jednaki.
- (6 bodova)** Definirajte Bellov broj  $B_n$ . Odredite koliko iznose  $B_1, B_2, B_3$  i  $B_4$ . Neka  $V_n$  označava broj particija  $n$ -članog skupa u kojima niti jedan blok nije jednočlan. Odredite koliko iznose  $V_1, V_2, V_3, V_4$  i  $V_5$ . Dokažite da je  $B_n = V_n + V_{n+1}$ .

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti pribor za pisanje i kalkulator.

Vedran Krčadinac