Imprimitivni distancijsko regularni grafovi

Valentino Marković

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet

May 28, 2024

Sadržaj

Definicija i primjeri

Definicija i primjeri

Definicija 1

Neka je $G = (X, E)$ povezan graf dijametra d. Kažemo da je G distancijsko regularan graf (DRG) ako broj $|N_i(x) \cap N_j(y)|$ ovisi samo o indeksima i, j te o udaljenosti $\partial(x, y)$, a ne o izboru vrhova $x, y \in X$, pri čemu je $N_i(x) = \{y \in X | \ \partial(x, y) = i\}$.

Teorem 1

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Ako za vrhove $x, y \in X$ definiramo da su i-asocirani kad je $\partial(x, y) = i$, dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa.

Definicija 2

Povezan graf G je distancijsko regularn ako je regular stupnja k i za svaka dva vrha na udaljenosti $\partial(x, y) = i$ brojevi $b_i = |N_{i+1}(x) \cap N_1(y)|$ i $c_i = |N_{i-1}(x) \cap N_1(y)|$ su konstantni.
Niz brojeva

$$\iota(G) := \{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$$

nazivamo presječnim nizom grafa G. Brojeve c_i, b_i i a_i, gdje je $a_i = |N_i(x) \cap N_1(y)|$ nazivamo presječnim brojevima od G.

Definicija 3

Za distancijsko regularan graf G dijametra d kažemo da je **imprimitivan** ako je za neki i, $1 \leq i \leq d$, graf N_i nepovezan.

Definicija i primjeri

Primjer 1

Potpuni bipartitan graf $K_{3,3}$ je imprimitivan distancijsko regularni graf s presječnim nizom $\{3, 2; 1, 3\}$, prikazan na slici (a). Na slici (b) prikazan je graf N_2 s dvije komponente.

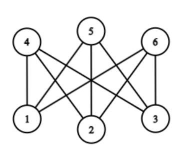

Figure: a)

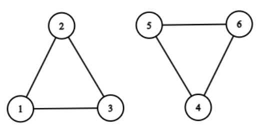

Figure: b)

Definicija i primjeri

Primjer 2

Oktaedarski graf je imprimitivan distancijsko regularni graf s presječnim nizom $\{4, 1; 1, 4\}$, prikazan na slici (a). Na slici (b) prikazan je graf N_2 s tri komponente.

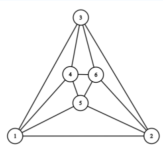

Figure: a)

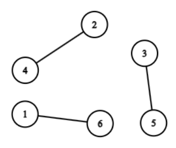

Figure: b)

Definicija i primjeri

Dva primjera imprimitivnih grafova dijametra $d \geq 2$ su *bipartitni grafovi* pri čemu je N_2 nepovezan s dvije komponente i *antipodalni grafovi*[1] (grafovi za koje je N_d relacija ekvivalencije, tj. disjunktna unija klika tj. potpunih podgrafova).

[1] Za graf G koji sadrži barem jedan brid kažemo da je antipodalan ako za svaki vrh $v \in V(G)$ postoji jedinstveni vrh $\overline{v}$ takav da je $\partial(v, \overline{v}) = d$, a za svaki vrh $u \neq \overline{v}$ vrijedi da je $\partial(v, u) < d$.

Glavni rezultat

Teorem 2

Imprimitivni distancijsko regularni graf stupnja $k > 2$ je bipartitan ili antipodalan (ili oboje).

Primjer 3

Ciklus C_9, povezan graf stupnja $k = 2$ s presječnim nizom $\{2, 1, 1, 1; 1, 1, 1, 1\}$, je imprimitivan ($N_3$ je nepovezan), ali nije bipartitan niti antipodalan.

Dokaz - 1. dio

Dokaz.

1. dio

Neka je G imprimitivan distancijsko regularan graf stupnja $k > 2$ dijametra d.

Neka je i najmanji prirodan broj takav da je N_i nepovezan.

Ako vrhovi x, y, z formiraju trojku tipa (j, i, i), tj. ako za te vrhove vrijedi $\partial(x, y) = j, \quad \partial(x, z) = \partial(y, z) = i$, onda je $p^j_{ii} > 0$ (jer $\exists z$).

Naime, DRG-ovi čine asocijacijsku shemu s d klasa, a presječni broj p^j_{ii} predstavlja broj vrhova grafa G koji su na udaljenosti i od x i na udaljenosti i od y, za svaka dva vrha x, y na udaljenosti j u grafu G.

Dokaz - 1. dio

Budući da je $p_{ii}^{j} > 0$, put u grafu N_j inducira put u grafu N_i. Stoga minimalnost od i implicira da je $j \geq i$ (jer za $j < i$, N_j bi morao biti povezan što bi impliciralo povezanost grafa N_i).

Dakle G ne sadrži trojku tipa (j, i, i) tako da je $j < i$.

Dokaz - 2. dio

2. dio: ako je $i = 2 < d$, graf je bipartitan.

Ako je $i = 1$, graf je nepovezan (kontradikcija).

Promotrimo slučaj kada je $i = 2 < d$.

Cilj: pokazati da graf G ne sadrži ciklus neparne duljine[2].

Prije toga, pokazati da graf G ne sadrži trokut.

Pretpostavimo suprotno; postoji vrh y takav da je $y \in N_1(x_0) \cap N_1(x_1)$.

Odaberemo vrhove x_0 i x_3 grafa G na udaljenosti 3 te promatramo put $x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim x_3$.

[2] Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži ciklus neparne duljine.

Dokaz - 2. dio

U slučaju da postoji takav vrh y, skupovi vrhova y, x_0 i x_2 te y, x_1 i x_3 bili bi tipa $(1, 2, 2)$, što nije moguće.

Naime, ako promatramo vrhove y, x_1 i x_3, zaključujemo da vrhovi y i x_3 nisu susjedni (inače bi $\partial(x_0, x_3) = 2$ preko vrha y).

Nadalje, Ako je $y \in N_1(x_2)$, onda vrhovi y, x_1 i x_3 čine trojku tipa $(1, 2, 2)$. Ako je $y \notin N_1(x_2)$, onda vrhovi y, x_0 i x_2 čine trojku tipa $(1, 2, 2)$.

Dakle, graf G ne sadrži trokut.

Dokaz - 2. dio

Cilj: pokazati da graf G ne sadrži ciklus neparne duljine. Dokaz kontradikcijom.

Pretpostavimo da u grafu G postoji zatvorena šetnja C neparne duljine veće od 3. Svi vrhovi od C leže u istoj komponenti povezanosti Δ od N_2.

Naime, U ciklusu od n vrhova (n neparan), ako je $\partial(x, y) = k$ (k neparan), tada se od x do y može doći preko $\frac{n+k}{2}$ vrhova koji su svi na udaljenosti 2 (tj. iz N_2).

Dokaz - 2. dio

Za svaka dva vrha $x, y \in \Delta$ koji su susjedni u G, vrijedi da se svi vrhovi susjedni s jednim od njih u G nalaze u komponenti Δ. Budući da je G povezan, slijedi da je $\Delta = G$.

Objašnjenje da je $\Delta = G$: postoji put u (povezanom) grafu G između vrhova $z \in G$ (proizvoljan) i $x \in \Delta$; neka je x_1 prvi vrh na tom putu t.d. je $x \sim x_1$. Postoji vrh y iz Δ t.d. je $x \sim x_1$, $x \sim y$ i $x_1 \not\sim y$ slijedi da je $x_1 \in \Delta$ i onda se nastavi po istom putu do vrha z na analogan način pa je Δ jedina komponenta od G tj. $\Delta = G$. To je kontradikcija.

Dakle, graf G ne sadrži zatvorenu šetnju neparne duljine pa je bipartitan.

Dokaz - 3. dio

3. dio: $2 < i < d$.

Ako je $2 < i < d$, onda odaberemo vrhove x_0 i x_d tako da je $\partial(x_0, x_d) = d$ te promatramo put $x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_d$ duljine d.

Kako je $k \geq 3$, postoji $y \neq x_i, x_{i+2}$ tako da je $y \sim x_{i+1}$.

Međutim, onda je $\partial(y, x_0) = i + l$ ($l \in \{0, 1, 2\}$) te je y, x_{i+l}, x_l trojka tipa (j, i, i), $j \leq 2$; kontradikcija. Detaljnije:

a) $\partial(y, x_0) = i + 2$, ako je $x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_i \sim x_{i+1} \sim y$,
b) $\partial(y, x_0) = i + 1$, ako je $y \sim x_i$,
c) $\partial(y, x_0) = i$, ako je $y \sim x_{i-1}$.

Vrh y nije susjedan s vrhom x_{i-2} za $2 < i < d$ jer je put od x_0 do x_d preko vrhova x_i najkraći (duljine d).

Dokaz - 4. dio

4. dio: Ako je $i = d$, graf je antipodalan.

Na kraju ako je $i = d$, onda sve trojke tipa (j, d, d) sa $j < d$ su zabranjene te induciraju N_d disjunktnu uniju potpunih podgrafova, tj. graf G je antipodalan[3].

□

[3] Graf G je antipodalan ako i samo je graf N_d disjunktna unija klika.

Operacije prepolavljanja i presavijanja

Operacija prepolavljanja

Ako je G povezan i bipartitan graf dijametra $d \geq 2$, onda graf N_2 ima dvije komponente.

Grafove inducirane na tim komponentama nazivamo prepolovljenim grafovima (eng. ***halved***) i označavamo sa G^+ i G^- (ili također $\frac{1}{2}G$ za bilo koji od njih). Grafovi $\frac{1}{2}G$ imaju dijametar $\lfloor d/2 \rfloor$.

Primjer prepolovljenih grafova su komponente grafa N_2 iz primjera 1.

Propozicija 1

Prepolovljeni grafovi bipartitnog distancijsko regularnog grafa su distancijsko regularni.

Operacija presavijanja

Ako je G antipodalan distancijsko regularan graf, po karakterizaciji antipodalnosti grafa, N_d je disjuktna unija potpunih grafova K_2 koje nazivamo vlakna (eng. *fibres*) od G.

Od antipodalnog DRG-a G može se konstruirati manji DRG $\overline{G}$, kojemu su vrhovi vlakna od G, a dva su susjedna ako postoji brid (u G) koji ih povezuje. Drugim riječima, graf $\overline{G}$ za vrhove ima klase ekvivalencije od N_d, pri čemu su dvije klase susjedne ako sadrže susjedne vrhove.

Takve grafove nazivamo presavinutim (eng. ***folded***) grafovima čiji je dijametar $\lfloor d/2 \rfloor$.

Primjer presavinutih grafova je graf K_3 dobiven iz antipodalnog grafa iz primjera 2.

Propozicija 2

Presavinuti graf distancijsko regularnog grafa je distancijsko regularan.

Operacije prepolavljanja i presavijanja

Često, ali svakako ne uvijek, prepolovljeni grafovi ili presavinuti grafovi imprimitivnog DRG-a su primitivini.

To može sugerirati da se teorija o DRG-ovima može svesti na primitivne DRG-ove što međutim nije slučaj.

Ne postoji jedinstven način za konstrukciju imprimitivinih distancijsko regularnih grafova iz primitivnih.

Operacije prepolavljanja i presavijanja

Operacije prepolavljanja i presavijanja ne mogu se primijeniti unazad, bar ne u općem smislu. To se očituje kod imprimitivnih DRG-ova s dijametrom tri kod kojih su prepolovljeni i presavinuti grafovi potpuni grafovi.

Operacije prepolavljanja i presavijanja

Primjer 4

Bipartitan i antipodalan graf $K_{5,5} - I$ s presječnim nizom $\{4, 3, 1; 1, 3, 4\}$ i dijametrom $d = 3$ je imprimitivni distancijsko regularan graf.

Prepolovljeni i presavinuti grafovi su potpuni K_5 grafovi (koji su primitivni DRG).

Graf N_3 sastoji se od disjunktne unije pet "štapića" (čiji su vrhovi antipodalni parovi).

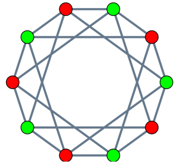

Figure: $K_{5,5} - I$ (Preuzeto s [3])

Neki rezultati

Pretpostavimo da je G DRG stupnja $k > 2$. Tada vrijedi:

i) ako je G antipodalan, onda presavinuti graf $\overline{G}$ nije antipodalan (osim u slučaju kad je G dijametra $d \leq 3$ pa je $\overline{G}$ potpun ili u slučaju kad je G bipartitan dijametra $d = 4$ pa je $\overline{G}$ potpun bipartitan),

ii) ako je G bipartitan, onda prepolovljeni graf $\frac{1}{2}G$ nije bipartitan,

iii) ako je G antipodalan te ima ili dijametar neparne duljine d ili nije bipartitan, onda je $\overline{G}$ primitivan,

iv) ako je G bipartitan te ima ili dijametar neparne duljine d ili nije antipodalan, onda je $\frac{1}{2}G$ primitivan.

Neki rezultati

Propozicija 3

Neka je G DRG s presječnim nizom $\iota(G) := \{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ i dijametrom $d \in \{2m, 2m+1\}$. Tada vrijedi:

i) G je bipartitan ako i samo ako je $b_i + c_i = k$ (tj. $a_i = 0$) za $i = 0, \ldots d$. U tom su slučaju prepolovljeni grafovi DRG dijametra m s presječnim nizom

$$\iota(G^{\pm}) = \left\{ \frac{b_0 b_1}{\mu}, \frac{b_2 b_3}{\mu}, \ldots, \frac{b_{2m-2} b_{2m-1}}{\mu}; \frac{c_1 c_2}{\mu}, \frac{c_3 c_4}{\mu}, \ldots, \frac{c_{2m-1} c_{2m}}{\mu} \right\}.$$

ii) G je antipodalan ako i samo ako je $b_i = c_{d-i}$ za $i = 0, \ldots, d$, $i \neq m$. U tom je slučaju $\overline{G}$ DRG dijametra m s presječnim nizom

$$\iota(\overline{G}) = \{b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}; c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, \gamma c_m\},$$

gdje je $\gamma = 1 + \frac{b_m}{c_{d-m}}$, ako je $d = 2m$ i $\gamma = 1$, ako je $d = 2m + 1$.

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Definicija 4

$i-$ta matrica udaljenosti je kvadratna matrica $A_i = [a^i_{\alpha\beta}]$ reda n pri čemu je

$$a^i_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } \partial(x_\alpha, x_\beta) = i, \\ 0, & \textit{inače} \end{cases} .$$

Matrice A_i zadovoljavaju relacije:

$$\begin{aligned} A_0 = I, \quad A_1 = A, \\ AA_i = c_{i+1}A_{i+1} + a_i A_i + b_{i-1}A_{i-1} \quad (i = 0, \ldots, d), \\ A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je A matrica susjedstva grafa G, $A_{-1} = A_{d+1} = 0$.

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Matrice A_i se mogu zapisati kao polinomi u A_1 stupnja i, tj.

$$A_i = p_i(A_1) \quad (i = 0, \ldots, d+1),$$

gdje su polinomi stupnja i definirani rekurzivno:

$$p_{-1}(x) = 0, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x,$$

$$c_{i+1}p_{i+1}(x) = (x - a_i)p_i(x) - b_{i-1}p_{i-1}(x) \quad (i = 0, \ldots, d).$$

Dokaz u [4].

Svojstvene vrijednosti

Matrica susjedstva A ima točno $d+1$ različitih svojstvenih vrijednosti koje su nultočke polinoma $p_{d+1}(x)$.

Neka su te svojstvene vrijednosti $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$.

Za svaku svojstvenu vrijednost θ od A, izraz (1) daje jednadžbu

$$\theta p_i(\theta) = c_{i+1} p_{i+1}(\theta) + a_i p_i(\theta) + b_{i-1} p_{i-1}(\theta) \quad (i = 0, \ldots, d)$$

, gdje je $p_{-1}(\theta) = p_{d+1}(\theta) = 0$.

Svojstvene vrijednosti

Stupanj grafa k je trivijalna svojstvena vrijednost od matrice A koja odgovara svojstvenom vektoru $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T$.

Vrijedi da je $p_i(k) = k_i$ što može poslužiti kao motivacija za uvođenje skaliranih veličina

$$u_i(\theta) := \frac{p_i(\theta)}{k_i} \quad (i = 0, \cdots, d).$$

Definicija 5

Niz $(u_0(\theta), \ldots, u_d(\theta))$ nazivamo *standardni niz* grafa G koji odgovara svojstvenoj vrijednosti θ.

Svojstvene vrijednosti

Koristeći dvije prethodne jednakosti dobivamo:

$$u_{-1}(\theta) = 0, \quad u_0(\theta) = 1, \quad u_1(\theta) = \theta/k$$
$$c_i u_{i-1}(\theta) + a_i u_i(\theta) + b_i u_{i+1}(\theta) = \theta u_i(\theta) \quad (i = 0, \ldots, d), \tag{2}$$

čime se mogu računati $u_i(\theta)$ ako je poznata svojstvena vrijednost θ.

Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

S obzirom na jednadžbu (2), možemo zaključiti da su svojstvene vrijednosti matrice A zapravo svojstvene vrijednosti tridijagonalne matrice reda $(d+1) \times (d+1)$

$$L := \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ & c_2 & \dots & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & b_{d-1} & \\ & & & c_d & a_d & \end{bmatrix},$$

a vektor $u := (u_0(\theta), \dots, u_d(\theta))^T$ je svojstveni vektor matrice L koji odgovara svojstvenoj vrijednosti θ (normaliziran tako da mu je prva komponenta jednaka jedan).

Standardni se niz koji odgovara trivijalnoj svojstvenoj vrijednosti $\theta_0 = k$ sastoji samo od jedinica.

Rezultat

Propozicija 4

Neka je G DRG s presječnim nizom $\iota(G) := \{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, c_2, \ldots, c_d\}$. *Neka su polinomi* w_i *definirani rekurzivno:*

$$w_0(x) := 1, \quad w_1(x) = x,$$

$$w_{i+1}(x) := (x - a_i)w_i(x) - c_i b_{i-1} w_{i-1}(x) \quad (i = 0, \ldots, d).$$

Svojstvene vrijednosti grafa G su nultočke polinoma $w_{d+1}(x)$ *i za svaku svojstvenu vrijednost* θ *vrijedi:*

$$u_i(\theta) = \frac{w_i(\theta)}{b_0 \cdots b_{i-1}}, \quad p_i(\theta) = \frac{w_i(\theta)}{b_1 \cdots c_i} \quad (i = 0, \ldots, d).$$

Svojstveni potprostor

Svojstveni potprostor s obzirom na svojstvenu vrijednost θ (θ-potprostor) distancijsko regularnog grafa G s n vrhova i matricom susjedstva A je prostor svih vektora $x \in \mathbb{R}^n$ tako da je $Ax = \theta x$.

Označimo s

$$E(\theta) := \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) A_i,$$

svojstvenu matricu od G koja odgovara svojstvenoj vrijednosti θ i njezinom standardnom nizu $(u_i)_{i=0}^{d}$.

Svojstveni potprostor

Lema 1

Za svaku svojstvenu vrijednost θ od G vrijedi:

$$AE(\theta) = \theta E(\theta).$$

Dokaz.

Pomoću (1) i (2):

$$\begin{aligned} AE(\theta) &= \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) A A_i = \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta)(c_{i+1}A_{i+1} + a_i A_i + b_{i-1}A_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{d} (u_{i-1}(\theta)c_i + u_i(\theta)a_i + u_{i+1}b_i)A_i = \sum_{i=0}^{d} \theta u_i(\theta) A_i \\ &= \theta E(\theta). \end{aligned}$$

□

Svojstveni potprostor

Veza između θ-potprostora, standardnog niza $u_i(\theta)$ i svojstvene matrice $E(\theta)$ iskazana je sljedećim teoremom.

Teorem 4

θ-potprostor distancijsko regularnog grafa G je dimenzije

$$m(\theta) = \frac{n}{\sum_{i=0}^{d} k_i u_i^2}.$$

Svojstvene vrijednosti prepolovljenih i presavinutih grafova

Teorem 5

Neka je G distancijsko regularan graf sa spektrom σ, pri čemu je svojstvena vrijednost $\theta \in \sigma$ kratnosti $m(\theta)$.

i) Ako je G bipartitan, onda je spektar prepolovljenih grafova G^+ i G^- jednak $\{(\theta^2 - k)/\mu \mid \theta \in \sigma\}$. Kratnost svojstvenih vrijednosti jednaka je $m(\theta)$, ako je $\theta \neq 0$ i $\frac{1}{2}m(0)$, ako je $\theta = 0$,

ii) Ako je G antipodalan dijametra $d > 2$, onda je spektar presavinutog grafa $\overline{G}$ podskup $\overline{\sigma}$ od σ. Kratnost svojstvene vrijednosti $\sigma \in \overline{\sigma}$ jednaka je $m(\theta)$.

Literatura

1. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, 1989.
2. E. R. van Dam, J. H. Koolen, H. Tanaka *Distance-regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, 2016. `https://arxiv.org/pdf/1410.6294.pdf` (pristupljeno 5.4.2024.).
3. Wikipedia, *Crown Graph*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Crown_graph` (pristupljeno 5.4.2024.).
4. K. Škufca, *Distancijsko regularni grafovi*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2022.