Prvi teorem o izomorfizmu za koherentne konfiguracije

Teo Šestak

Sveučilište u Zagrebu
teo.sestak@fsb.unizg.hr

Zagreb, 11. ožujka 2024.

Sadržaj

Sadržaj

Uvod

- koherentne konfiguracije su (na neki način) generalizacija grupa
- moguće je definirati potkonfiguracije, kvocijentne konfiguracije, jezgre, itd.
- strukturu želimo proučavati pomoću teorije kategorija (Akihide Hanaki, 2010.)
- kategorija $\mathcal{AS}$ nema dobra svojstva
  - slika morfizma nije potkonfiguracija
  - **nemamo prvi teorem o izomorfizmu**
  - standardne operacije koje koherentnim konfiguracijama pridružuju grupe nisu funktorijalne
- možemo konstruirati kategoriju $\mathcal{S}$ s manjom klasom morfizama, gdje tih problema nemamo (Christopher French, 2013.)

Što je su koherentne konfiguracije?

- pojam se pojavio u istraživanju permutacijskih grupa i algebri povezanih s njima
- povezane sa algebrom, kombinatorikom, statistikom, teorijom dizajna, itd.

Sadržaj

Definicija koherentne konfiguracije

Definicija (Koherentna konfiguracija)

Neka je X *konačan skup,* $|X| = n$*, za neki* $n \in \mathbb{N}$*. Koherentna konfiguracija s* d *klasa na* X *je skup relacija* $S = \{R_0, \dots, R_d\}$ *na* $X \times X$ *koji zadovoljavaju sljedeće:*

1. $R_0 = \{(x, x) \ : \ x \in X\}$,
2. $R_0, \dots, R_d$ *čine particiju od* $X \times X$,
3. *za svaki indeks* i *postoji indeks* i' *takav da je* $R_i^t = R_{i'}$
4. *za svaki izbor indeksa* i, j, k *postoji presječni broj* $p_{ij}^k \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$|\{z \in X \ : \ (x, z) \in R_i, \ (z, y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$$

za sve parove $(x, y) \in R_k$.

Kompleksni produkt

Ako je S koherentna konfiguracija, tada je na $\mathcal{P}S$ definirana sljedeća operacija:

Definicija (Kompleksni produkt)

Neka je S koherentna konfiguracija nad X i $P, Q \subseteq S$. Kompleksni produkt P i Q, u oznaci PQ je skup

$$PQ = \{R_k \in S \;:\; p_{ij}^k > 0 \text{ za neke } R_i \in P,\ R_j \in Q\}.$$

Kompleksni produkt je asocijativan.

Ako su $p, q \in S$ (tj. postoje i, j takvi da je $p = R_i$ i $q = R_j$), koristimo oznake $pq = \{p\}\{q\}$, $pQ = \{p\}Q$ i $Pq = P\{q\}$.

Zatvoreni podskupovi

Za daljnje razmatranje, bit će nam bitan pojam zavorenih podskupova od S.

Definicija (Zatvoren podskup)

Neka je S koherentna konfiguracija na X, tada je neprazan podskup $T \subseteq S$ zatvoren ako vrijedi $TT = T$.

T zatvoren $\Rightarrow$ ako je $R_i \in T$, onda je i $R_{i'} \in T$.

Sadržaj

Teorija kategorija

Neformalno, a *kategorija* se sastoji od:

- kolekcije *objekata* i
- za svaki par objekata, kolekcije *morfizama* među tim objektima (iz *domene* u *kodomenu*).

Morfizmi se mogu komponirati, čime dobivamo njihovu *kompoziciju*. Ta operacija je asocijativna i za nju postoje lijevi i desni neutralni elementi.

Morfizam je *izomorfizam* ako ima obostrani inverz, *monomorfizam* ako se "krati slijeva" i *epimorfizam* ako se "krati zdesna".

Kategorija koherentnih konfiguracija $\mathcal{AS}$

- objekti: koherentne konfiguracije
- morfizmi: ?
  - Zieschang: definicija homomorfizma
  - problem: kompozicija homomorfizama nije homomorfizam

Definicija

Homomorfizam koherentnih konfiguracija je funkcija

$$\phi : X \cup S \to Y \cup T$$

takav da je $\phi(X) \subseteq Y$, $\phi(S) \subseteq T$ *i ako je* $s \in S$ *i* $(x, y) \in s$, *onda je* $(\phi(x), \phi(y)) \in \phi(s)$ *i za sve* $x, y \in X$ *i* $s \in S$ *takve da vrijedi* $(\phi(x), \phi(y)) \in \phi(s)$ *postoje* $x', y' \in X$ *takvi da* $(x', y') \in s$ *i* $\phi(x') = \phi(x)$ *i* $\phi(y') = \phi(y)$.

Kategorija koherentnih konfiguracija $\mathcal{AS}$

- Hanaki: definicija morfizma
- problemi?
  - ima ih; kasnije

Definicija

Morfizam koherentnih konfiguracija S na X i T na Y je funkcija

$$\phi : X \cup S \to Y \cup T$$

takva da je $\phi(X) \subseteq Y$, $\phi(S) \subseteq T$ i ako je $s \in S$ i $(x, y) \in s$, onda je $(\phi(x), \phi(y)) \in \phi(s)$.

Ovime je dobro definirana kategorija $\mathcal{AS}$.

Nedostatak nul-objekta

- problem: kategorija grupa ima *nul-objekt*, tj. objekt objekt Z sa svojstvom da za svaki drugi objekt C postoje jedinstveni morfizmi $C \to Z$ i $Z \to C$), taj objekt je trivijalna grupa
- kako popraviti taj problem?

Koherentne konfiguracije s baznom točkom

- rješenje: bazne točke

Promatramo novu kategoriju $\mathcal{AS}_0$,

- objekti: (X, S, x), gdje je (X, S) koherentna konfiguracija, a $x \in X$
- morfizmi: između (X, S, x) i (Y, T, y): morfizam $(X, S) \xrightarrow{f} (Y, T)$ iz $\mathcal{AS}$ takav da vrijedi $f(x) = y$

Koherentne konfiguracije s baznom točkom

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem

U kategoriji $\mathcal{AS}_0$ postoji nul-objekt dan sa

$$X = \{x\} \quad i \quad S = \{\{(x, x)\}\}$$

(taj nul objekt označavamo s 0_x).

Osim nul-objekta, u $\mathcal{AS}_0$ postoje i *nul-morfizmi*, tj. jedinstveni morfizmi koje se mogu zapisati kao kompozicija

$$(X, S, x) \to 0_x \to (Y, T, y).$$

Za (X, S, x) i (Y, T, y) to je morfizam koji preslikava $x \mapsto y$ za sve $x \in X$.

Tanke koherentne konfiguracije

Zanima nas posebna klasa koherentnih konfiguracija, tzv. tanke koherentne konfiguracije. One su definirane na sljedeći način:

Definicija

Neka je $R_i \in S$ za neki objekt (X, S, x) u $\mathcal{AS}_0$. Tada definiramo stupanj relacije $n_i := p^0_{ii'}$.

Definicija

Koherentna konfiguracija je tanka ako su joj svi stupnjevi jednaki 1.

- čine grupu obzirom na "kompleksni produkt"
- vrijedi $st = \{u\}$, za neki $u \in S$, pa možemo definirati $st = u$.

Potkategorija $\mathcal{AS}_0^{\text{thin}}$

Uzmimo potkategoriju $\mathcal{AS}_0^{\text{thin}}$ od $\mathcal{AS}$, kojoj su objekti sve tanke koherentne konfiguracije iz $\mathcal{AS}_0$ i svi morfizmi među njima. Vrijedi:

Definicija

Kategorija $\mathcal{AS}_0^{\text{thin}}$ je ekvivalentna kategoriji **FinGrp** *konačnih grupa i homomorfizama konačnih grupa.*

Koherentne konfiguracije su (na neki način) generalizacije konačnih grupa. Postavlja se ima li kategorija $\mathcal{AS}$ bitna svojstva kategorije **FinGrp**.

Ima li kategorija $\mathcal{AS}$ bitna svojstva kategorije **FinGrp**?

Odgovor: Ne

- ne vrijedi prvi teorem u izomorfizmu (ne postoje slike)
- pridruživanje grupa koherentnim konfiguracijama (tanki radikali, tanki kvocijenti) nisu funktori
- pridruživanje algebri koherentnim konfiguracijama (algebre susjedstva) nisu funktori

Ima li kategorija $\mathcal{AS}$ bitna svojstva kategorije **FinGrp**?

Novo pitanje: Možemo li to nekako "popraviti"?

Tri česte ideje u sličnim situacijama:

- modificiramo objekte
- smanjimo klasu objekata
- smanjimo klasu morfizama

Jezgre i kvocijenti

Uzet ćemo manju klasu morfizama, vođeni idejom da želimo dokazati prvi teorem o izomorfizmu. U tu svrhu trebamo definirati slike, jezgre i kvocijente.

Jezgre i kvocijenti

Definicija

Ako je ϕ *morfizam koherentnih konfiguracija* $S = \{R_i \ : \ i = 0, \ldots, d\}$ *i* $T = \{R'_i \ : \ i = 0, \ldots, d'\}$, *jezgra od* ϕ, *u oznaci* $\ker \phi$, *je skup*

$$\ker \phi = \{s \in S \ : \ \phi(s) = R'_0\}.$$

Jezgra je zatvoren skup.

Jezgre i kvocijenti

Definicija

Zatvoreni podskup T koherentne konfiguracije S je normalan ako $pT = Tp$ za sve $p \in S$ i jako normalan ako $pTp^t = T$ za sve $p \in S$. Podskupove pT i Tp zovemo redom lijeva i desna susjedna klasa.

Jezgre i kvocijenti

Definicija

Neka je S koherentna konfiguracija na X, $x \in X$, $s \in S$. Označimo sa

$$xs = \{y \in X \ : \ (x, y) \in s\}.$$

Ako je $T \subseteq S$ i $Y \subseteq X$, označimo sa

$$YT = \bigcup_{y \in Y,\, t \in T} yt$$

(koristimo oznake $xT = \{x\}T$ i $Yt = Y\{t\}$).
Ako je T zatvoren podskup od S i $x \in X$, tada xT zovemo geometrijskom susjednom klasom od T koja sadrži x. Skup geometrijskih susjednih klasa od T označavamo sa X/T.

Jezgre i kvocijenti

Definicija

Koherentna potkonfiguracija od T određena s xT, u oznaci T_{xT}, je skup svih nepraznih podskupova od $xT \times xT$ oblika $t_{xT} := t \cap (xT \times xT)$, gdje je $t \in T$.

Neka je T zatvoren podskup od S. Za svaki $s \in S$, neka je

$$s^T = \{(xT, yT) \ : \ (x', y') \in s \text{ za neke } x' \in xT, y' \in yT\}.$$

Za podskup $R \subseteq S$, s $R /\!\!/ T$ označavamo skup svih podskupova

$$R /\!\!/ T := \{r^T \subseteq X/T \times X/T \ : \ r \in R\}.$$

Uzmemo li $R = S$, $S /\!\!/ T$ je koherentna konfiguracija na X/T.

Jezgre i kvocijenti

Definicija

Kvocijentna koherentna konfiguracija od S po T je skup $S /\!\!/ T$.

Sada smo definirali sve što nam je potrebno kako bismo razumjeli iskaz prvog teorema o izomorfizmu. Za morfizam koherentnih konfiguracija ϕ želimo izomorfizam

$$\overline{\phi} : S /\!\!/ \ker \phi \to \operatorname{im} \phi,$$

gdje je S domena (dio domene) od ϕ, a $\operatorname{im} \phi$ slika od ϕ. Kao definiciju slike uzimamo općenitu definiciju slike u teoriji kategorija.

Jezgre i kvocijenti

Problem u $\mathcal{AS}$: općenito morfizmi nemaju slike, pa nema smisla ni pitati jesu li $S /\!\!/ \ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$.

Sadržaj

Dopustivi morfizmi

Definicija

Neka je S koherentna konfiguracija na X i T koherentna konfiguracija na Y. Morfizam koherentnih konfiguracija $\phi : S \to T$ je dopustiv ako za svaki $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$ takve da $(\phi(x), y) \in \phi(s)$, postoji $x' \in X$ takav da $\phi(x') = y$ i $(x, x') \in s$.

- kompozicija dopustivih morfizama je dopustiv morfizam
- izomofrizam (pa i identiteta) je dopustiv morfizam
- dopustivi morfizam je homomorfizam (potrebno za dokaz)

Dakle, koherentne konfiguracije i dopustivi morfizmi čine kategoriju. Nazovimo ju $\mathcal{S}$.

Sadržaj

Prvi teorem o izomorfizmu

Za kategoriju $\mathcal{S}$ vrijedi sljedeći teorem:

Teorem (Prvi teorem o izomorfizmu)

Neka su S i T koherentne konfiguracije na X i Y redom i neka je $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(S, T)$. Neka je $K = \ker \phi$. Tada:

(i) *K je normalan zatvoren podskup od S,*

(ii) *$\mathrm{im}\,\phi$ je koherentna potkonfiguracija od T,*

(iii) *ϕ inducira izomorfizam $\overline{\phi} : S /\!\!/ K \to \mathrm{im}\,\phi$ takav da je $\phi = \iota_{\phi(X)} \circ \overline{\phi} \circ \pi_K$. Nadalje, vrijedi $\overline{\phi}(xK) = \phi(x)$ i $\overline{\phi}(R_i^K) = \phi(R_i)_{\phi(X)}$.*

Prvi teorem o izomorfizmu

Teorem ćemo dokazati pomoću tri leme:

Lema 1

Neka su $S = \{R_i \ : \ i\}$ i $T = \{P_i \ : \ i\}$ koherentne konfiguracije na X i Y redom i neka je $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(S, T)$. Ako je $R \subseteq S$ zatvoren podskup, tada je $\phi(R)$ zatvoren podskup od T i za bilo koju geometrijsku susjednu klasu W od R, $\phi(W)$ je geometrijska susjedna klasa od $\phi(R)$. Posebno, $\phi(S)$ je zatvoren podskup od T i $\phi(X)$ je geometrijska susjedna klasa od $\phi(S)$.

Prvi teorem o izomorfizmu

Lema 2

Neka su $S = \{R_i \ : \ i\}$ i $T = \{P_i \ : \ i\}$ koherentne konfiguracije na X i Y redom i neka je $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(S, T)$. Tada je $\ker \phi$ normalan zatvoren podskup od S.

Prvi teorem o izomorfizmu

Lema 3

Neka su S i T koherentne konfiguracije na X i Y redom, neka je $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(S, T)$ i neka je $K = \ker \phi$. Definiramo $\overline{\phi} : S \mathbin{/\!/} K \to \operatorname{im} \phi$ kao $\overline{\phi}(xK) = \phi(x)$ i $\overline{\phi}(R_i^K) = \phi(R_i)_{\phi(X)}$. Tada je $\overline{\phi}$ izomorfizam koherentnih konfiguracija.

Funktori

- u $\mathcal{S}$ vrijedi prvi teorem u izomorfizmu, kao što smo dokazali
- u $\mathcal{S}$ su neke operacije, koje nisu funktorijalne u $\mathcal{AS}$ (tanki radikali, tanki kvocijenti, algebre susjedstva) funktori

- French, C., *Functors from association schemes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 120, Issue 6, 2013, Pages 1141-1165.
- Hanaki, A., *A category of association schemes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 117, Issue 8, 2010, Pages 1207-1217.
- Krčadinac, V., *Asocijacijske sheme*, predavanja, 2023./24.
- Zieschang, P. H., *Theory of Association Schemes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.