Amorfne asocijacijske sheme

Patrik Vasung

21. listopada 2024.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema sa d klasa je skup relacija $\{R_0, \dots, R_d\}$ na konačnom skupu X takvih da vrijedi.

1) $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$,
2) $\bigcup_{i=0}^{d} R_i = X \times X$,
3) $R_i = R_i^T, \forall i \in \{0, \dots, d\}$,
4) Za sve $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$ postoji p_{ij}^k takav da za svaki $(x, y) \in R_k$ vrijedi $p_{ij}^k = |\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$.

Propozicija

Neka je $\{R_0, \dots, R_d\}$ asocijacijska shema. Tada vrijedi

$$p_{ij}^k = p_{ji}^k, \forall i, j, k \in \{0, \dots, d\}.$$

Asocijacijske sheme

Neka je $\{R_0 \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema sa d klasa na $n-$članom skupu X. Tada svaka od relacija R_i definira graf sa n vrhova.
Općenito, ako je G graf sa n vrhova, definiramo matricu $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ sa

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \sim j \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za matricu A kažemo da je **matrica susjedstva** grafa G.

Bose Mesnerova algebra

Neka je $\{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema sa d klasa, te neka je A_i matrica susjedstva grafa R_i. Tada iz definicije asocijacijske sheme slijedi

1) $A_0 = I$,
2) $A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J$,
3) $A_i = A_i^T, \forall i \in \{0, \ldots, d\}$,
4) $A_i A_j = \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^k A_k, \forall i, j \in \{0, \ldots d\}$.

Vektorski prostor $\langle A_0, \ldots, A_d \rangle$ je algebra koju zovemo **Bose Mesnerova** algebra.
Vrijedi

$$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i, \forall i, j \in \{0, \ldots d\}.$$

Odnosno, matrice $A_0, \ldots, A_d$ su Schurove idempotente.

Bose Mesnerova algebra

Teorem

Bose Mesnerova algebra ima jedinstvenu bazu $\{E_0, \dots, E_d\}$ sastavljenu od primitivnih idempotenta ($E_i E_j = \delta_{ij} E_i$) takvu da vrijedi

1) $E_0 = \frac{1}{n} J$,
2) $E_0 + E_1 + \cdots + E_d = I$,
3) $E_i = E_i^T, \forall i, j \in \{0, \dots, d\}$,
4) $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} q_{ij}^k E_k, \forall i, j \in \{0, \dots d\}$.

Svojstvene vrijednosti

Zapišemo li matrice A_j u bazi $\{E_0, \dots, E_d\}$ dobivamo

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_{ji} E_i.$$

Brojevi $P_{ji}, i \in \{0, \dots, d\}$ su upravo svojstvene vrijednosti matrice A_j.
S druge strane, zapišemo li matrice E_j u bazi $\{A_0, \dots, A_d\}$ dobivamo

$$E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{d} Q_{ji} A_i.$$

Definiramo matrice P i Q tako da je na mjestu (i, j) u matrici P element P_{ji}, a u matrici Q je element Q_{ji}. Vrijedi $PQ = QP = nI$.

Jako regularni grafovi

Definicija

Neka je G jednostavan graf sa n vrhova koji nije potpun niti prazan. Kažemo da je G **jako regularan** graf s parametrima (n, k, λ, μ) ako vrijedi

1) Svaki vrh od G je stupnja k,
2) svaka dva susjedna vrha imaju λ zajedničkih susjeda,
3) svaka dva nesusjedna vrha imaju μ zajedničkih susjeda.

Teorem

Asocijacijska shema sa dvije klase ekvivalentna je paru jako regularnog grafa i njegovog komplementa.

Jako regularni grafovi

Neka je G jako regularan graf sa parametrima (n, k, λ, μ). Tada je $\{I, G, G^c\}$ asocijacijska shema sa dvije klase. Zapišemo li G u bazi primitivnih idempotenti dobivamo

$$G = kE_0 + rE_1 + sE_2.$$

Za brojeve r i s kažemo da su **svojstvene vrijednosti** grafa G.

Definicija

Neka je G jako regularan graf s parametrika (n, k, λ, μ). Kažemo da G ima **tip latinskog kvadrata** ako vrijedi $n = m^2, k = t(m-1)$ i svojstvene vrijednosti su mu $m - t$ i $-t$, za neke pozitivne $t, m \in \mathbb{Z}$. Ukoliko su t i m negativni cijeli brojevi sa prethodnim svojstvima, onda kažemo da G ima **negativan tip latinskog kvadrata**.

Amorfne asocijacijske sheme

Definicija

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema s d klasa. Neka je $\pi = \{\pi(i) \mid i \in \{0, 1, \ldots, d'\}\}$ particija skupa $\{0, 1, \ldots, d\}$ takva da je $\pi(0) = \{0\}$. Za $i \in \{0, 1, \ldots, d'\}$ definiramo $S_i = \bigcup_{j \in \pi(i)} R_j$. Kažemo da je skup $\{S_0, \ldots, S_{d'}\}$ **fuzija** asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.
Za particiju π kažemo da **podržava fuziju** za $\mathcal{A}$ ako je skup $\{S_0, \ldots, S_{d'}\}$ asocijacijska shema.
Kažemo da uređeni par (i, j) **podržava fuziju** za $\mathcal{A}$ ako particija $\{\{0\}, \{i, j\}, \{k_1\}, \{k_2\}, \ldots, \{k_{d-3}\}\}$ podržava fuziju za $\mathcal{A}$, gdje je $\{k_1, \ldots, k_{d-3}\} = \{1, \ldots, d\} \setminus \{i, j\}$.

Definicija

Za asocijacijsku shemu $\{R_0, \ldots, R_d\}$ kažemo da je **amorfna** ako je svaka njezina fuzija asocijacijska shema.

Amorfne asocijacijske sheme

Pretpostavimo da je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema sa d klasa. Tada vrijedi:

- $d = 2 \Rightarrow \mathcal{A}$ je amorfna asocijacijska shema.
- $\mathcal{A}$ je amorfna $\Rightarrow$ graf $R_i \in \mathcal{A}$ je jako regularan za svaki $i \neq 0$.
- $\mathcal{A}$ je amorfna $\Rightarrow$ svaka fuzija od $\mathcal{A}$ je amorfna asocijacijska shema.

Afina ravnina

Definicija

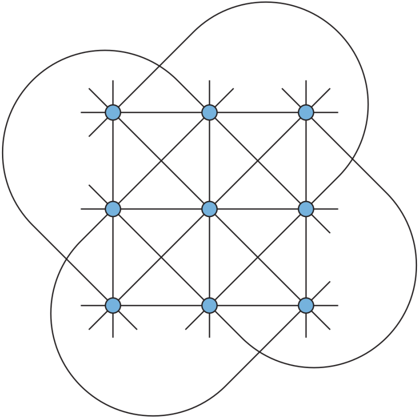
Konačna afina ravnina je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. gdje su $\mathcal{P}, \mathcal{L}$ konačni skupovi točaka i pravaca, a $\mathcal{I}$ relacija incidencije sa sljedećim svojstvima

1) za svake dvije točke postoji jedinstven pravac koji prolazi kroz njih,
2) za svaki pravac l i točku p koja nije na pravcu l postoji jedinstven pravac l' koji sadži točku p i paralelan je sa l,
3) Postoje barem tri točke koje ne leže na istom pravcu.

Za konačnu afinu ravninu vrijedi:

- Ako jedan pravac sadži n točaka onda svi pravci sadrže n točaka. Kažemo da je n **red** afine ravnine.
- Afina ravnina reda n ima n^2 točaka i $n^2 + n$ pravaca.
- U afinoj ravnini reda n relacija paralelnosti pravaca ima $n + 1$ klasa ekvivalencije.

Afina ravnina



Slika: Afina ravnina reda 3.

Afina ravnina

Pomoću konačne afine ravnine reda n možemo definirati amorfnu asocijacijsku shemu na sljedeći način.
Vrhove asocijacijske sheme čini skup od n^2 točaka u ravnini. Neka su $K_1, \ldots, K_{n+1}$ klase evkivalencije relacije paralelnosti pravaca.
Za klasu K_i definiramo graf G_i u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako pravac koji prolazi kroz njih pripada klasi K_i. Na ovaj način dobivamo amorfnu asocijacijsku shemu sa $n+1$ klasa.
Svaki graf u ovoj asocijacijskoj shemi je jako regularan stupnja $n-1$.
Štoviše, svaki graf ima tip latinskog kvadrata ($t=1, m=n$).

Bannai-Muzichukov kriterij

Teorem (Bannai-Muzichuk)

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema, te neka je π particija skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da je $\pi(0) = \{0\}$. Particija π pdržava fuziju za $\mathcal{A}$ ako i samo ako postoji particija φ skupa $\{0, \ldots, d\}$ takva da svaki $(\varphi(j), \pi(i))$-blok matrice svojstvenih vrijednosti P ima konstantnu sumu redaka.

Klasifikacija amorfnih asocijacijskih shema

Teorem

Svaki graf u amorfnoj asocijacijskoj shemi sa barem tri klase je jako regularan. Dodatno, svaki graf ima tip latinskog kvadrata ili svaki graf ima tip negativnog latinskog kvadrata.

Dokaz.

Dovoljno je dokazati tvrdnju za amorfnu asocijacijsku shemu sa 3 klase. Pretpostavimo da su R_1, R_2, R_3 jako regularni grafovi u amorfnoj asocijacijskoj shemi sa 3 klase. Neka je k_i stupanj grafa R_i, te neka su r_i, s_i svojstvene vrijednosti grafa R_i, za $i \in \{1, 2, 3\}$.

Klasifikacija amorfnih asocijacijskih shema

Nastavak dokaza.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da matrica P ima oblik

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & r_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & s_1 & r_2 & s_3 \\ 1 & s_1 & s_2 & r_3 \end{bmatrix}.$$

Slijedi $r_1 - s_1 = r_2 - s_2 = r_3 - s_3$. Koristeći jednakost $PQ = nI$ i činjenicu da je $Q_{ij} = \frac{m_j}{k_i} P_{ji}$ dobivamo jednakosti

$$1 + \frac{r_1 s_1}{k_1} + \frac{r_2 s_2}{k_2} + \frac{s_3^2}{k_3} = 0$$

$$1 + \frac{r_1 s_1}{k_1} + \frac{s_2^2}{k_2} + \frac{r_3 s_3}{k_3} = 0$$

Klasifikacija amorfnih asocijacijskih shema

Nastavak dokaza.

Iz posljednje dvije jednakosti dobivamo $\frac{s_2}{k_2} = \frac{s_3}{k_3}$. Na sličan način dobije se i $\frac{s_1}{k_1} = \frac{s_2}{k_2}$. Iz druge jednakosti i činjenice da je $1 + r_1 + s_2 + s_3 = 0$ dobivamo $\frac{k_1}{s_1} = 1 - (r_2 - s_2)$. Označimo $r_2 - s_2$ sa u. Zaključujemo da je

$$k_i = s_i(1 - u), \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Nadalje, imamo

$$n = 1 + k_1 + k_2 + k_3 = 1 + (s_1 + s_2 + s_3)(1 - u) = u^2.$$

Klasifikacija amorfnih asocijacijskih shema

Vrijedi i obrat prethodnog teorema.

Teorem

Pretpostavimo da je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema takva da svaki od grafova R_i ima (negativan) tip latinskog kvadrata. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna asocijacijska shema.

Klasifikacija amorfnih asocijacijskih shema

Neka je $d \geq 2$. Sa $L_{t_1,\ldots,t_d}(n)$ označavamo familiju svih amorfnih asocijacijskih shema $\{R_0, \ldots, R_d\}$ na skupu X takvih da je svaki od grafova R_i jako regularan i ima tip latinskog kvadrata sa parametrima

$$|X| = n^2,$$

$$k_i = t_i(n-1),$$

$$\lambda_i = (t_i - 1)(t_i - 2) + n - 2,$$

$$\mu_i = t_i(t_i - 1).$$

Analogno definiramo i familiju $NL_{t_1,\ldots,t_d}(n)$.

Samodualnost amorfnih asocijacijskih shema

Teorem

Neka je $d \geq 3$, te neka je $\{R_0, \dots, R_d\}$ amorfna asocijacijska shema sa n^2 vrhova. Neka je $\epsilon = \pm 1$. Pretpostavimo da je stupanj od R_i jednak $t_i(n - \epsilon)$, za svaki i. Tada matrica svojstvenih vrijednosti ima koeficijente dane sa

$$P_{ji} = -\epsilon t_i, \; i, j \neq 0, i \neq j$$

$$P_{ii} = \epsilon(n - t_i), \; i \neq 0.$$

Dodatno, vrijedi $P = Q$.

Dokaz.

Kako je asocijacijska shema amorfna, svaki graf R_i ima (ovisno o ϵ) tip latinskog kvadrata ili negativan tip latinskog kvadrata. Prema tome, svojstvene vrijednosti grafa R_i su $\epsilon(n - t_i)$ i $-\epsilon t_i$, za svaki i.

Samodualnost amorfnih asocijacijskih shema

Nastavak dokaza.

Kako je $n^2 = 1 + k_1 + \cdots + k_d$ imamo da je

$$t_1 + \cdots + t_d = n + \epsilon.$$

Za svaki $j \neq 0$ vrijedi

$$1 + P_{j2} + \cdots + P_{jd} = 0.$$

Nadalje, kako je za sve i, j P_{ji} jednak ili $-\epsilon t_i$ ili $\epsilon(n - t_i)$ zaključujemo da za svaki $j \neq 0$ postoji točno jedan $i \neq 0$ takav da je $P_{ji} = \epsilon(n - t_i)$. Kako svaki stupac matrice sadrži barem jednu vrijednost $\epsilon(n - t_i)$ slijedi $P_{ii} = \epsilon(n - t_i), \forall i$.

Samodualnost amorfnih asocijacijskih shema

Nastavak Dokaza.

Za svaki od grafova R_i dimenzija svojstvenog potprostora od svojstvene vrijednosti $\epsilon(n - t_i)$ jednaka k_i, iz čega slijedi $m_i = k_i, \forall i$. Sada imamo

$$Q_{ij} = \frac{m_j}{k_i} P_{ji} = \frac{k_j}{k_i} P_{ji} = \frac{t_j}{t_i} P_{ji}.$$

Slijedi da je $P = Q$.

Presječni brojevi

Korolar

Neka je $d \geq 3$, te neka je $\{R_0, \ldots, R_d\}$ amorfna asocijacijska shema sa n^2 vrhova. Neka je $\epsilon = \pm 1$. Pretpostavimo da je stupanj od R_i jednak $t_i(n-\epsilon)$, za svaki i. Neka su $i, j, h \in \{1, \ldots, d\}$ međusobno različiti, tada vrijedi

$$p_{ii}^{i} = \epsilon n - 2 + (t_i - \epsilon)(t_i - 2\epsilon)$$

$$p_{ii}^{j} = t_i(t_i - \epsilon)$$

$$p_{ij}^{j} = t_i(t_j - \epsilon)$$

$$p_{ij}^{h} = t_i t_j.$$

Presječni brojevi

Dokaz.

Slijedi direktno iz prethodnog teorema i jednakosti

$$p_{ij}^h = \frac{1}{nk_h} \sum_t m_t P_{th} P_{ti} P_{tj}.$$

Kriteriji amorfnosti

Pitanje: Koja svojstva mora zadovoljavati asocijacijska shema da bi mogli zaključiti da je amorfna?

Teorem

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema sa matricom svojstvenih vrijednosti P. Pretpostavimo da postoji c takav da je

$$P_{ii} - P_{ji} = c,$$

za sve $i \neq j$. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna.

Teorem

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, \ldots, R_d\}$ asocijacijska shema takva da za sve $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ uređeni par (i, j) podržava fuziju za $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna.

Fuzijski graf

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, \dots, R_d\}$ asocijacijska shema sa d klasa. Definiramo graf $\Gamma(\mathcal{A})$ na skupu vrhova $\{1, \dots, d\}$ sa

$$i \sim j \iff (i, j) \text{ podržava fuziju za } \mathcal{A}.$$

Kažemo da je $\Gamma(\mathcal{A})$ **fuzijski graf** asocijacijske sheme $\mathcal{A}$.
Uočimo da se tvrdnja prethodnog teorema može formulirati i ovako

$$\mathcal{A} \text{ je amorfna} \iff \Gamma(\mathcal{A}) = K_d.$$

Fuzijski graf

Propozicija

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema sa $d \geq 3$ klasa. Pretpostavimo da $\Gamma(\mathcal{A})$ sadrži Hamiltonov ciklus. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna.

Lema

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema sa 4 klase. Pretpostavimo da $\Gamma(\mathcal{A})$ sadrži $K_{1,3}$ kao podgraf. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna.

Fuzijski graf

Pomoću prethodne dvije tvrdnje dokazuje se sljedeći teorem.

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema sa $d \geq 3$ klasa. Pretpostavimo da je $\Gamma(\mathcal{A})$ povezan, ali da nije put. Tada je $\mathcal{A}$ amorfna.

Napomena

Postoji asocijacijska shema $\mathcal{A}$ takva da je $\Gamma(\mathcal{A})$ put.

Hadamardove matrice

Definicija

Hadamardova matrica reda n je $n \times n$ matrica H sa elementima ± 1, za koju vrijedi

$$HH^T = nI.$$

Definicija

Neka je n pozitivan prirodan broj, te neka je J_{2n} matrica reda $2n$ koja sadrži samo jedinice. Neka je H Hadamardova matrica reda $4n^2$ koja se sastoji od blokova H_{ij} reda $2n$. Kažemo da je H **Bushovog tipa** ako vrijedi

$$H_{ii} = J_{2n},$$

$$H_{ij} J_{2n} = J_{2n} H_{ij} = 0, \forall i \neq j, 0 \leq i, j \leq 2n.$$

Hadamardove matrice

Teorem

Neka je H simetrična Hadamardova matrica Bushovog tipa reda $4n^2$. Stavimo

$$A_0 = I_{4n^2},$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(J_{4n^2} + H - 2(I_{2n} \otimes J_{2n})),$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(J_{4n^2} - H),$$

$$A_3 = I_{2n} \otimes J_{2n} - I_{4n^2}.$$

Neka je R_i graf sa matricom susjedstva A_i, za svaki $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tada je $\mathcal{A} = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ amorfna asocijacijska shema sa 3 klase. Dodatno, vrijedi $\mathcal{A} \in L_{1,n}(2n)$.

Hadamardove matrice

Obratno, svaka amorfna asocijacijska shema $\mathcal{A} \in L_{1,n}(2n)$ sa 3 klase inducira simetričnu Hadamardovu matricu Bushovog tipa.

Teorem

Neka je $\mathcal{A} = \{R_0, R_1, R_2, R_3\} \in L_{1,n}(2n)$ amorfna asocijacijska shema sa 3 klase. Neka A_i matrica susjedstva grafa R_i. Tada je matrica

$$H = A_0 + A_1 - A_2 + A_3 = J_{4n^2} - 2A_2$$

simetrična Hadamardova matrica Bushovog tipa reda $4n^2$.

Literatura

- E.R. van Dam, M. Muzychuk, Some implications on amorphic association schemes, J. Comb. Theory, Ser. A 117 (2) (2010) 111–127.
- Edwin R. van Dam, Jack H. Koolen, Yanzhen Xiong, Characterizations of amorphic schemes and fusions of pairs, arXiv:2404.00567
- T. Ito, A. Munemasa, and M. Yamada, Amorphous association schemes over the Galois rings of characteristic 4, Europ. J. Combinatorics 12 (1991), 513-526
- R.W. Goldbach, H.L. Claasen, 3-Class association schemes and Hadamard matrices of a certain block form, European J. Combin. 19 (1998) 943–951.