Terwilligerove algebre

Pavao Radić
pradic@pmfst.hr

30. rujna 2024.

Uvodni pojmovi

Definicija

Koherentna konfiguracija reda n s d klasa sastoji se od n-članog skupa vrhova X i relacija $R_0, \ldots, R_d \subseteq X \times X$ takvih da vrijedi:

1. $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ je dijagonala,
2. $\{R_0, \ldots, R_d\}$ čine particiju od $X \times X$,
3. za svaki indeks i postoji indeks i' takav da je $R_i^t = R_{i'}$,
4. za svaki izbor indeksa i, j, k postoji **presječni broj** $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $|\{z \in X \mid (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$ za sve parove $(x,y) \in R_k$.

- simetrična koherentna konfiguracija ($i = i'$) - **asocijacijska shema**
- komutativna koherentna konfiguracija ($p_{ij}^k = p_{ji}^k$)

$$\text{simetričnost} \implies \text{komutativnost}$$

Uvodni pojmovi

Neka je G graf sa skupom vrhova X.

- put duljine k - niz $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ međusobno različitih vrhova takav da je $x_{i-1} \sim x_i$
- udaljenost vrhova (x, y) - duljina najkraćeg puta od x do y
- povezani graf - graf u kojem postoji put između svaka dva vrha
- ∂ je metrika na skupu vrhova povezanog grafa
- dijametar grafa - najveća moguća udaljenost vrhova

Ako je x vrh, označimo s

$$N_i(x) = \{y \in X \mid \partial(x, y) = i\}$$

Uvodni pojmovi

Definicija

Neka je G povezan graf dijametra d. Kažemo da je G distancijsko regularan graf ako za svaki izbor i, j, k i za sve $x, y \in X$ takve da $\partial(x, y) = k$ broj

$$p_{ij}^{k} = | N_i(x) \cap N_j(y) | = | \{z \in X \mid \partial(x, z) = i, \partial(z, y) = j\} |$$

ne ovisi o izboru vrhova x i y.

Teorem

Neka je G distancijsko regularan graf dijametra d. Ako za vrhove $x, y \in X$ definiramo da su i-asocirani kad je $\partial(x, y) = i$, dobivamo asocijacijsku shemu s d klasa.

Za asocijacijsku shemu koja nastaje od distancijsko regularnog grafa G kažemo da je **metrička** s obzirom na G.

Uvodni pojmovi

Neka je G distancijsko regularan graf stupnja regularnosti k. Definirajmo:

$$a_i = p^i_{1i}, \quad b_i = p^i_{1,i+1}, \quad c_i = p^i_{1,i-1}$$

Vrijedi

$$a_i + b_i + c_i = k$$

Presječni niz distancijsko regularnog grafa je niz $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$. Uočimo da vrijedi

$$p^i_{1,j} = 0 \quad \text{ako je } |i - j| > 1$$

Uvodni pojmovi

Nadalje, neka su A_i matrice susjedstva grafova asocijacijske sheme koja nastaje od G, pri čemu je $A_1 = A$ matrica susjedstva od G. Primjetimo da vrijedi

$$(AA_i)(x,y) = \mid N_1(x) \cap N_i(y) \mid = \begin{cases} b_{i-1}, & \partial(x,y) = i-1 \\ a_i, & \partial(x,y) = i \\ c_{i+1}, & \partial(x,y) = i+1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$AA_i = b_{i-1}A_{i-1} + a_iA_i + c_{i+1}A_{i+1}$$

Uvodni pojmovi

Iz prethodne relacije slijedi sljedeća lema:

Lema

Matrice A_i mogu se zapisati kao polinomi u A stupnja i, tj. $A_i = p_i(A)$.

$$\langle A \rangle = \left\langle I, A, \ldots, A^d \right\rangle = \langle A_0, A_1, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$$

Uvodni pojmovi

Primjer (Hammingova shema)

Neka je F skup od q simbola (slova). Skup vrhova $X = F^d$ sadrži sve uređene $d-$torke slova, koje zovemo riječima. Udaljenost riječi $x = (x_1, \dots, x_d)$ i $y = (y_1, \dots, y_d)$ definiramo kao broj koordinata na kojima se razlikuju:

$$\partial(x, y) = \mid \{i \mid x_i \neq y_i\} \mid .$$

Neka su riječi $x, y \in X$ susjedne u grafu G_i ako su na udaljenosti i. Tako dobijemo Hammingovu asocijacijsku shemu $H(d, q)$ s d klasa, reda $n = q^d$.

Primjetimo da je Hammingova shema metrička s obzirom na G_1. (Hammingova metrika se podudara s metrikom definiranom pomoću susjedstva u grafu G_1).

Uvodni pojmovi

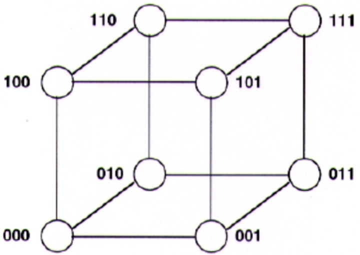
Definicija

d-dimenzionalna hiperkocka (d-kocka ili Hammingova kocka) je prvi graf binarne Hammingove sheme $H(d, 2)$.

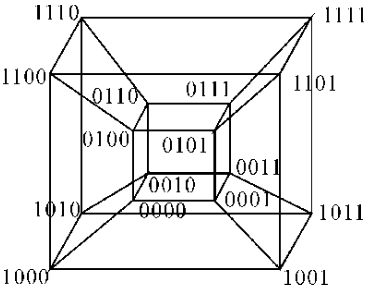
Dakle, dva vrha su susjedna ako se razlikuju u točno jednoj koordinati. Vrijedi

$$a_i = 0, \quad b_i = d - i, \quad c_i = i \quad (0 \leq i \leq d)$$

Uvodni pojmovi



Slika: H(3,2)



Slika: H(4,2)

Bose-Mesnerove algebre

Neka je $X = \{1, \ldots, n\}$ skup vrhova i $(X, \{R_i\}_{i=0}^d)$ koherentna konfiguracija. Za $0 \leq i \leq d$ definirajmo matrice $A_i = [a_{xy}^{(i)}] \in M_n(\mathbb{C})$:

$$a_{xy}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (x, y) \in R_i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

1. $A_0 = I$
2. $\sum_{i=0}^d A_i = J$
3. za svaki $0 \leq i \leq d$ postoji $i' \in \{0, 1, \ldots, d\}$ takav da je $A_i^t = A_{i'}$
4. za sve $0 \leq i, j \leq d$ postoje $p_{ij}^k \in \mathbb{N}_0$ takvi da je

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$$

Bose-Mesnerove algebre

- komutativnost $A_i A_j = A_j A_i$
- simetričnost $A_i^t = A_i$

$$\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_d \rangle \leq M_n(\mathbb{C})$$

- $I, J \in \mathcal{A}$
- zatvorenost na transponiranje
- sve matrice imaju konstantne dijagonale
- zatvorenost na Schurovo množenje $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$

Bose-Mesnerove algebre

Definicija

Za potprostor $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ kažemo da je koherentna algebra ako sadrži I, J, zatvoren je na transponiranje, matrično i Schurovo množenje te sve matrice iz $\mathcal{A}$ imaju konstantne dijagonale. Komutativne koherentne algebre nazivamo Bose-Mesnerovim algebrama.

Bose-Mesnerove algebre

Lema

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na Schurovo množenje. Onda postoji baza $\{A_0, \ldots, A_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi

$$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$$

Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica.

Matrice koje zadovoljavaju prethodnu relaciju zovemo Schurovim idempotentama.

Teorem

Svaka koherentna algebra $\mathcal{A}$ ima jedinstvenu bazu $\{A_0, \ldots, A_d\}$ sastavljenu od Schurovih idempotenta. Ta baza je koherentna konfiguracija u smislu "matrične definicije".

Neka je sada $\mathcal{A}$ Bose-Mesnerova algebra. Kako po prethodnom teoremu ima bazu sastavljenu od realnih $0-1$ matrica, zatvorena je i na konjugiranje, pa je zatvorena i na adjungiranje.

Lema

Neka je $\mathcal{A} \leq M_n(\mathbb{C})$ potprostor koji je zatvoren na matrično množenje i adjungiranje te matrice iz $\mathcal{A}$ međusobno komutiraju. Onda postoji baza $\{E_0, \ldots, E_d\}$ od $\mathcal{A}$ takva da vrijedi

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i$$

Baza s tim svojstvom je jedinstvena do na poredak matrica, a sadrži hermitske matrice.

Matrice koje zadovoljavaju prethodnu relaciju zovemo primitivnim idempotentama.

Bose-Mesnerove algebre

Dakle, Bose-Mesnerova algebra $\mathcal{A}$ asocijacijske sheme ima dvije istaknute baze, jednu sastavljenu od Schurovih idempotenti $A_0, \ldots, A_d$ te jednu sastavljenu od primitivnih idempotenti $E_0, \ldots E_d$.

- $A_0 = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$
- $A_i^t = A_i$
- $\overline{A_i} = A_i$
- $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$
- $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$

- $E_0 = \frac{1}{n} J$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i = I$
- $E_i^t = E_i$
- $\overline{E_i} = E_i$
- $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$
- $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$

$$q_{ij}^k \geq 0 - \text{ Kreinovi parametri}$$

Bose-Mesnerove algebre

$$n_i = |N_i(x)| = |\{z \in X \mid (x,z) \in R_i\}|$$

$$m_i = \text{tr } E_i = \text{rank } E_i = \dim \text{Im} E_i$$

- $n_0 = 1$
- $n_0 + \ldots + n_d = n$
- $m_0 = 1$
- $m_0 + \ldots + m_d = n$

$$V_i = \text{Im } E_i \leq \mathbb{C}^n, \quad \mathbb{C}^n = V_0 \oplus \ldots \oplus V_d$$

Bose-Mesnerove algebre

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_i(j) E_j$$

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) A_j$$

- $P_0(i) = 1$
- $Q_0(i) = 1$
- $P_j(0) = n_j$
- $Q_j(0) = m_j$

Uvedimo oznaku $\theta_j = P_1(j)$ za $0 \leq j \leq d$.

Dualne Bose-Mesnerove algebre

Neka je $X = \{1, \dots, n\}$ skup vrhova i $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0}^{d})$ komutativna koherentna konfiguracija.
Identificirajmo $y = i \in X$ sa $\hat{y} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.
$\{\hat{y}\}$ je ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$.
Fiksirajmo vrh $x \in X$ i za $0 \leq i \leq d$ definirajmo dijagonalne matrice $E_i^* = E_i^*(x)$ tako da je

$$E_i^*(y, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako } (x, y) \in R_i \\ 0, & \text{ako } (x, y) \notin R_i \end{cases}$$

E_i^* - i-ta dualna primitivna idempotenta od $\mathcal{X}$ s obzirom na bazni vrh x

Dualne Bose-Mesnerove algebre

Vrijede sljedeća svojstva:

- $E_i^* E_j^* = \delta_{i,j} E_i^*$
- $\sum_{i=0}^{d} E_i^* = I$
- $\{E_i^*\}_{i=0}^{d}$ je linearno nezavisan
- $\overline{E_i^*} = E_i^*, E_i^{*t} = E_i^*$

Dakle, $\{E_i^*\}_{i=0}^{d}$ je baza komutativne podalgebre $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*(x)$ od $M_n(\mathbb{C})$. $\mathcal{A}^*$ zovemo dualnom Bose-Mesnerovom algebrom od $\mathcal{X}$ obzirom na vrh x.

$$V_i^* = \mathrm{Im} E_i^*, \qquad \mathbb{C}^n = V_0^* \oplus \cdots \oplus V_d^*$$

$$V_i^* = \langle \{\hat{y} \mid y \in N_i(x)\} \rangle$$

$$\dim V_i^* = n_i$$

Dualne Bose-Mesnerove algebre

Lema

Postoji izomorfizam algebri $\varphi \colon \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}^*$ *koji šalje* $A_i \mapsto E_i^*$ *za* $0 \leq i \leq d$.

$$A_i \circ A_j = \delta_{i,j} A_i \qquad E_i^* E_j^* = \delta_{i,j} E_i^*$$

$$\varphi(A)(y,y) = A(x,y)$$

Definicija

Za $0 \leq i \leq d$ definirajmo $A_i^* \in \mathcal{A}^*$ kao sliku od nE_i po preslikavanju φ iz prethodne leme. A_i^* zovemo i-ta dualna asocirana matrica od $\mathcal{A}$ obzirom na x.

Dualne Bose-Mesnerove algebre

Vrijedi

$$A_i^*(y,y) = nE_i(x,y)$$

Matrice $\{A_i^*\}_{i=0}^d$ tvore još jednu bazu za $\mathcal{A}^*$ te vrijedi

$$A_i^* = \sum_{j=0}^{d} Q_i(j) E_j^*$$

$$E_i^* = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} P_i(j) A_j^*$$

$Q_i(j)$ je svojstvena vrijednost od A_i^* pridružena zajedničkom svojstvenom potprostoru V_i^* od $\mathcal{A}^*$.
Uvedimo oznaku $\theta_j^* = Q_1(j)$ za $0 \leq j \leq d$.

Dualne Bose-Mesnerove algebre

Također vrijede i sljedeća svojstva:

- $A_0^* = I$
- $\sum_{i=0}^{d} A_i^* = nE_0^*$
- $\overline{A_i^*} = A_i^*$ (u simetričnom slučaju)
- $A_i^{*t} = A_i^*$ (u simetričnom slučaju)
- $A_i^* A_j^* = \sum_{k=0}^{d} q_{i,j}^k A_k^*$

Definicija

Podalgebru $T = T(x)$ od $M_n(\mathbb{C})$ generiranu sa $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$ zovemo Terwilligerovom algebrom (u odnosu na baznu točku x).

- po konstrukciji je konačnodimenzionalna
- općenito je nekomutativna
- zatvorena je na konjugiranje i transponiranje
- poluprosta je

Na $M_n(\mathbb{C})$ definirajmo bilinearnu formu $(A, B) = \mathrm{tr}(A^t \overline{B})$, $\|A\|^2 = (A, A)$.

Lema

Za $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, i, j, k \leq d$ vrijedi

- $(E^*_\alpha A_\beta E^*_\gamma, E^*_i A_j E^*_k) = \delta_{\alpha,i}\delta_{\beta,j}\delta_{\gamma,k} n_\gamma p^\gamma_{\alpha,\beta}$
- $(E_\alpha A^*_\beta E_\gamma, E_i A^*_j E_k) = \delta_{\alpha,i}\delta_{\beta,j}\delta_{\gamma,k} m_\gamma q^\gamma_{\alpha,\beta}$

Teorem

Za $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq d$ vrijedi

- $q^\gamma_{\alpha,\beta} \geq 0$
- $E^*_\alpha A_\beta E^*_\gamma = 0$ *akko* $p^\gamma_{\alpha,\beta} = 0$
- $E_\alpha A^*_\beta E_\gamma = 0$ *akko* $q^\gamma_{\alpha,\beta} = 0$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(E^*_\alpha A_\beta E^*_\gamma, E^*_i A_j E^*_k) &= \mathrm{tr}(E^*_\alpha A_\beta E^*_\gamma)^t \overline{E^*_i A_j E^*_k}) \\
&= \mathrm{tr}(E^*_\gamma A_{\beta'} E^*_\alpha E^*_i A_j E^*_k) \\
&= \delta_{\alpha,i}\delta_{\gamma,k}\mathrm{tr}(E^*_\gamma A_{\beta'} E^*_\alpha A_j)
\end{aligned}
$$

Terwilligerove algebre

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(E^*_\gamma A_{\beta'} E^*_\alpha A_j) &= \sum_{y\in X}\sum_{z\in X}(E^*_\gamma)_{y,y}(A_{\beta'})_{y,z}(E^*_\alpha)_{z,z}(A_j)_{z,y} \\
&= \sum_{y\in X}\sum_{z\in X}(E^*_\gamma)_{y,y}(A_{\beta'}\circ A_{j'})_{y,z}(E^*_\alpha)_{z,z} \\
&= \delta_{\beta,j}\sum_{y\in X}\sum_{z\in X}(E^*_\gamma)_{y,y}(A_{\beta'})_{y,z}(E^*_\alpha)_{z,z} \\
&= \delta_{\beta,j}\sum_{\substack{y\in N_\gamma(x),\\ z\in N_\alpha(x)\cap N_{\beta'}(y)}} 1 \\
&= \delta_{\beta,j} n_\gamma p^\gamma_{\alpha,\beta}
\end{aligned}$$

Vratimo se sada na primjer hiperkocke Q_d koja je prvi graf binarne Hammingove sheme $H(d, 2)$. Pokažimo da vrijedi:

Lema

Q_d je distancijsko regularan graf sa presječnim brojevima:

$$a_i = 0, \qquad b_i = d - i, \qquad c_i = i \qquad (0 \leq i \leq d)$$

Stupnjevi su dani sa $n_i = \binom{d}{i} \qquad (0 \leq i \leq d)$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Lema

Neka su $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ svojstvene vrijednosti od Q_d, a m_i za $0 \leq i \leq d$ njihove kratnosti. Tada vrijedi

$$\theta_i = d - 2i \qquad (0 \leq i \leq d)$$

$$m_i = \binom{d}{i} \qquad (0 \leq i \leq d)$$

Lema

Za graf Q_d neka je $E_0, E_1, \ldots, E_d$ standardni poredak primitivnih idempotenti. Vrijedi

$$\theta_i^* = d - 2i \qquad (0 \leq i \leq d)$$

Terwilligerova algebra hiperkocke

$$A^* = \sum_{j=0}^{d} \theta_j^* E_j^*$$

$$E_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} \theta_j^* A_j$$

Stavimo $\sigma_j = d - 2j$ za $0 \leq j \leq d$ i

$$E = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} \sigma_j A_j$$

Pokažimo da je $E = E_1$.

Uočimo da vrijedi

$$c_j\sigma_{j-1} + b_j\sigma_{j+1} = \theta_1\sigma_j \quad (0 \le j \le d)$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}(A-\theta_1 I)E &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{d}\sigma_j(A-\theta_1 I)A_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{d}\sigma_j(c_{j+1}A_{j+1} + b_{j-1}A_{j-1} - \theta_1 A_j) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{d}A_i(c_i\sigma_{i-1} + b_i\sigma_{i+1} - \theta_1\sigma_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi $E = \beta E_1$, a kako je trag od E isti kao i trag od E_1, slijedi da je $\beta = 1$ čime je tvrdnja dokazana.

Terwilligerova algebra hiperkocke

Neka je x fiksni vrh od Q_d. Tada su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$ generirane sa matricom susjedstva A i dualnom matricom susjedstva $A^* = A^*(x)$, pa je posebno Terwiiligerova algebra hiperkocke generirana sa A i A^*.

Lema

Neka su x, y, z proizvoljni vrhovi od Q_d takvi da je $\partial(x, y) = \partial(x, z)$ i $\partial(y, z) = 2$.

- *Postoji jedinstveni vrh u od Q_d takav da je $\partial(y, u) = 1, \partial(z, u) = 1$ i $\partial(x, u) = \partial(x, y) - 1$.*
- *Postoji jedinstveni vrh v od Q_d takav da je $\partial(y, v) = 1, \partial(z, v) = 1$ i $\partial(x, v) = \partial(x, y) + 1$.*

Terwilligerova algebra hiperkocke

Teorem

Neka je x fiksni vrh od Q_d i $A^* = A^*(x)$. Vrijedi:

- $A^2A^* - 2AA^*A + A^*A^2 = 4A^*$
- $A^{*2}A - 2A^*AA^* + AA^{*2} = 4A$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Neka su y, z proizvoljni vrhovi od Q_d te stavimo $i = \partial(x, y)$.
Sjetimo se da je $A^2 = b_0 A_0 + a_1 A_1 + c_2 A_2$, što je u ovom slučaju

$$A^2 = dI + 2A_2$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
r &= A^2 A^*(y,z) = A^2(y,z)A^*(z,z) \\
s &= AA^*A(y,z) = \sum_u A(y,u)A^*(u,u)A(u,z) \\
t &= A^*A^2(y,z) = A^*(y,y)A^2(y,z) \\
u &= A^*(y,z) = \ldots
\end{aligned}$$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Promotrimo slučajeve u kojima nisu svi ovi brojevi jednaki 0.

- $y = z \implies r = d\theta^*_i, s = c_i\theta^*_{i-1} + b_i\theta^*_{i+1}, t = d\theta^*_i, u = \theta^*_i$
- $\partial(x, z) = i - 2, \partial(y, z) = 2 \implies r = 2\theta^*_{i-2}, s = 2\theta^*_{i-1}, t = 2d\theta^*_i$
- $\partial(x, z) = i, \partial(y, z) = 2 \implies r = 2\theta^*_i, s = \theta^*_{i-1} + \theta^*_{i+1}, t = 2d\theta^*_i$
- $\partial(x, z) = i + 2, \partial(y, z) = 2 \implies r = 2\theta^*_{i+2}, s = 2\theta^*_{i+1}, t = 2d\theta^*_i$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Neka je x fiksni vrh od Q_d i $E_i^* = E_i^*(x)$ za $0 \leq i \leq d$. Definirajmo $R = R(x)$ i $L = L(x)$:

$$R = \sum_{i=0}^{d} E_{i+1}^* A E_i^*, \qquad L = \sum_{i=0}^{d} E_{i-1}^* A E_i^*$$

R i L zovemo raising(lowering) matrix obzirom na bazni vrh x. Uočimo da vrijedi i

$$\overline{R} = R, \qquad \overline{L} = L, \qquad R^t = L, \qquad A = R + L$$

Nadalje,

$$RV_i^* \subseteq V_{i+1}^*, \qquad LV_i^* \subseteq V_{i-1}^*$$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Lema

Neka je x fiksni vrh od Q_d te $A^* = A^*(x), R = R(x), L = L(x)$. Vrijedi:

- $R = \frac{AA^* - A^*A + 2A}{4}$
- $L = \frac{A^*A - AA^* + 2A}{4}$

Lema

Neka je x fiksni vrh od Q_d te $A^* = A^*(x), R = R(x), L = L(x)$. Vrijedi:

- $LR - RL = A^*$
- $RA^* - A^*R = 2R$
- $LA^* - A^*L = -2L$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Označimo sa C desnu stranu jednakosti i pokažimo da je $C = R$.

$$\begin{aligned} C &= \left(\sum_{i=0}^{d} E_i^*\right) C \left(\sum_{j=0}^{d} E_j^*\right) \\ &= \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} \frac{\theta_j^* - \theta_i^* + 2}{4} E_i^* A E_j^* \end{aligned}$$

Kako je Q_d bipartitan graf, vrijedi

$$E_i^* A E_j^* = 0 \quad \text{ako je } |i-j| \neq 1 \quad (0 \leq i, j \leq d)$$

Nadalje,

$$\theta_j^* - \theta_i^* + 2 = \begin{cases} 4, & \text{ako } i - j = 1 \\ 0, & \text{ako } i - j = -1 \end{cases}$$

Podsjetimo se definicije Liejeve algebre.

Definicija

Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{F}$ je vektorski prostor L nad tim poljem zajedno sa bilinearnim preslikavanjem

$$L \times L \to L \quad (x, y) \mapsto [x, y]$$

kojeg zovemo Liejeva zagrada i koje zadovoljava sljedeće uvjete:

$(L1)$ $[x, x] = 0$ za sve $x \in L$,

$(L2)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [y, x]] = 0$ za sve $x, y, z \in L$

Ako je L asocijativna algebra nad poljem $\mathbb{F}$, tada možemo definirati

$$[x, y] = xy - yx \text{ za sve } x, y \in L$$

pa L zajedno sa $[-, -]$ postaje Liejeva algebra.
Najpoznatiji primjer je $M_n(\mathbb{F})$ algebra svih kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{F}$.
Neka je

$$sl_n(\mathbb{F}) = \{x \in M_n(\mathbb{F}) \mid \text{tr } x = 0\}$$

potprostor od $M_n(\mathbb{F})$. Uz $[x, y] = xy - yx$ postaje Liejeva algebra jer je za proizvoljne matrice x i y trag od $xy - yx$ jednak 0. Zovemo je specijalna Liejeva algebra.

Promotrimo sada posebno $sl_2(\mathbb{C})$. Označimo joj bazne elemente na sljedeći način:

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad l = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vrijede sljedeće relacije:

$$[l, r] = h$$

$$[r, h] = 2r$$

$$[l, h] = -2l$$

Definicija

Neka je L Liejeva algebra nad poljem $\mathbb{C}$ te J dvostrani ideal u $T(L)$ generiran elementima oblika $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ za $x, y \in L$. Kvocijentnu algebru $T(L)/J$ nazivamo univerzalna omotačka algebra i označavamo sa $U(L)$.

Pokaže se da je $i \colon L \to U(L)$ definiran sa $i(x) = x + J$ injektivni homomorfizam Liejevih algebri.

Terwilligerova algebra hiperkocke

Baza od $U(sl_2(\mathbb{C}))$ je oblika

$$\{\mathcal{R}^a \mathcal{H}^b \mathcal{L}^c \mid a, b, c \geq 0\}$$

i elementi $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}$ zadovoljavaju

$$\mathcal{L}\mathcal{R} - \mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{H}, \quad \mathcal{R}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{R} = 2\mathcal{R}, \quad \mathcal{L}\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{L} = -2\mathcal{L}$$

Terwilligerova algebra hiperkocke

Teorem

Neka je x fiksni vrh od Q_d i $T = T(x)$. Postoji jedinstveni surjektivni homomorfizam $\mathbb{C}$-algebri $\rho\colon U(sl_2(\mathbb{C})) \to T$ koji zadovoljava

$$\mathcal{L}^\rho = L, \quad \mathcal{R}^\rho = R, \quad \mathcal{H}^\rho = A^*$$

Literatura

[1] P. Terwilliger
The Subconstituent Algebra of an Association Scheme, (Part I)*
Journal of Algebraic Combinatorics 1 (1992), 363-388.

[2] Junie T. Go
The Terwilliger Algebra of the Hypercube
Europ. J. Combinatorics 23 (2002), 399-429.

[3] P. Terwilliger
Algebraic Combinatorics: Association Schemes
University of Wisconsin-Madison, 2023.

[4] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka
Algebraic combinatorics
De Gruyter, 2021.

HVALA NA PAŽNJI :)