Teoremi Erdős-Ko-Rado tipa

(Asocijacijske sheme - ispitni seminar)

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

29. rujna 2025.

Za familiju $\mathcal{F}$ podskupova od N kažemo da je presijecajuća ako vrijedi

$$A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

EKR

Za familiju $\mathcal{F}$ podskupova od N kažemo da je presijecajuća ako vrijedi

$$A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \neq \emptyset.$$

Teorem

Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$. Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$. Tada

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Za $n > 2k$ jednakost vrijedi ako i samo ako se $\mathcal{F}$ sastoji od svih k-podskupova koji sadrže jedan fiksirani element iz $\{1, \ldots, n\}$.

EKR - generalizirano

Teorem

Neka su $k, n, t \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$, $0 \leq t \leq k$. *Postoji funkcija* $f(k,t)$ *takva da ako je* $n \geq f(k,t)$ *i* $\mathcal{F}$ *je familija t-presijecajućih k-podskupova skupa* $\{1, \ldots, n\}$, *tada*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako se $\mathcal{F}$ *sastoji od svih k-podskupova koji sadrže jedan fiksirani t-podskup od* $\{1, \ldots, n\}$.

EKR kao problem na grafovima

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v,k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k-1$ elemenata.

EKR kao problem na grafovima

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v, k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k - 1$ elemenata.

Generalizirani Johnsonov graf $J(v, k, i)$ ima skup vrhova X, a skupovi (vrhovi) su susjedni ako se sijeku u $k - i$ elemenata.
$J(v, k, k)$ poznat je i pod imenom Kneserov graf.

EKR kao problem na grafovima

Neka je $X = \binom{V}{k}$ familija svih k-članih podskupova v-članog skupa V. Johnsonov graf $J(v, k)$ je graf kojemu je skup vrhova X, a dva su skupa (vrha) susjedna ako se sijeku u $k - 1$ elemenata.

Generalizirani Johnsonov graf $J(v, k, i)$ ima skup vrhova X, a skupovi (vrhovi) su susjedni ako se sijeku u $k - i$ elemenata.
$J(v, k, k)$ poznat je i pod imenom Kneserov graf.

Svaka dva nesusjedna vrha u Kneserovom grafu čine par presijecajućih skupova.

EKR kao problem na grafovima

- klika u grafu — skup vrhova takvih da su svaka dva susjedna
- koklika u grafu (nezavisan skup) — skup vrhova takvih da ne postoje dva susjedna

EKR kao problem na grafovima

- klika u grafu — skup vrhova takvih da su svaka dva susjedna
- koklika u grafu (nezavisan skup) — skup vrhova takvih da ne postoje dva susjedna
- $\omega(X)$ — veličina najveće klike u grafu X
- $\alpha(X)$ — veličina najveće koklike u grafu X

EKR kao problem na grafovima

- klika u grafu — skup vrhova takvih da su svaka dva susjedna
- koklika u grafu (nezavisan skup) — skup vrhova takvih da ne postoje dva susjedna
- $\omega(X)$ — veličina najveće klike u grafu X
- $\alpha(X)$ — veličina najveće koklike u grafu X

Skup generaliziranih Johnsonovih grafova $J(v, k, i)$ za $i = 0, 1, \ldots, k$, odnosno njihovih matrica susjedstva, čini asocijacijsku shemu s k klasa poznatu kao Johnsonova shema.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa na n-članom skupu X, $n \in \mathbb{N}$, skup je neusmjerenih nepraznih grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$ sa skupom vrhova X takav da vrijedi:

1. *graf G_0 kao skup bridova ima samo petlje na svim vrhovima iz X,*
2. *za različite elemente $x, y \in X$ postoji točno jedan graf G_i koji sadrži brid $\{x, y\}$,*
3. *za sve $x, y \in X$ te za sve $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ broj elemenata $z \in X$ takvih da je $\{x, z\}$ brid u G_i, a $\{y, z\}$ brid u G_j ovisi samo o grafu G_k koji sadrži brid $\{x, y\}$. Taj broj zovemo presječnim brojem sheme i označavamo $p_{i,j}^k$.*

Za graf G_i kažemo da je i-ta klasa sheme, a za elemente $x, y \in X$ kažemo da su i-asocirani ako je $\{x, y\}$ brid u grafu G_i.

Grafovi asocijacijske sheme su regularni.

Asocijacijske sheme

Definicija

Asocijacijska shema s d klasa je skup matrica $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ različitih od nulmatrice dimenzija $n \times n$ s elementima 0 ili 1 koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. $A_0 = I$,
2. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
3. $A_i^t = A_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$,
4. *produkt matrica $A_i A_j$ je linearna kombinacija matrica $A_0, A_1, \ldots, A_d$ za sve i, j.*

Matrice asocijacijske sheme komutiraju s obzirom na matrično množenje, a idempotentne su i međusobno ortogonalne s obzirom na Schurovo množenje.

Bose-Mesnerova algebra

Potprostor $\mathbb{C}[\mathcal{A}] = \langle A_0, A_1, \ldots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{C})$ razapet matricama asocijacijske sheme je komutativna (pod)algebra koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom asocijacijske sheme.

Bose-Mesnerova algebra

Potprostor $\mathbb{C}[\mathcal{A}] = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ od $M_n(\mathbb{C})$ razapet matricama asocijacijske sheme je komutativna (pod)algebra koju zovemo Bose-Mesnerovom algebrom asocijacijske sheme.

Teorem

Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asocijacijska shema s d klasa čije su matrice dimenzija $n \times n$. Tada postoje s obzirom na matrično množenje idempotentne i u parovima ortogonalne matrice $E_0, E_1, \dots, E_d$ te brojevi $p_i(j) \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi:

a. $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,
b. $A_i E_j = p_i(j) E_j$,
c. $E_0 = \frac{1}{n} J$,
d. $\{E_0, E_1, \dots, E_d\}$ *je baza za* $\text{span}(\mathcal{A})$.

Matrice $E_0, E_1, \dots, E_d$ su hermitske i pozitivno semidefinitne (idempotentne su pa su im svojstvene vrijednosti 0 i 1).

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo primitivnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo primitivnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $n_0, n_1, \ldots, n_d$ redom stupnjevi grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$, odnosno grafova određenih redom matricama susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$
- $m_0, m_1, \ldots, m_d$ dimenzije svojstvenih potprostora koje određuju redom $E_0, E_1, \ldots, E_d$ (kratnosti asocijacijske sheme $\mathcal{A}$)

Dualni parametri

- E_j, $j = 0, 1, \ldots, d$, nazivamo primitivnim idempotentama asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $p_i(j)$ nazivamo svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme $\mathcal{A}$
- $n_0, n_1, \ldots, n_d$ redom stupnjevi grafova $G_0, G_1, \ldots, G_d$, odnosno grafova određenih redom matricama susjedstva $A_0, A_1, \ldots, A_d$
- $m_0, m_1, \ldots, m_d$ dimenzije svojstvenih potprostora koje određuju redom $E_0, E_1, \ldots, E_d$ (kratnosti asocijacijske sheme $\mathcal{A}$)

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j) E_j \qquad E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{d} q_j(i) A_i$$

- $q_i(j)$ nazivamo dualnim svojstvenim vrijednostima asocijacijske sheme

Dualni parametri

Lema

Neka je $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ *asocijacijska shema s* d *klasa čije su matrice dimenzija* $n \times n$ *te neka su* $p_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, *svojstvene vrijednosti od* $\mathcal{A}$, *a* $q_i(j)$, $i, j = 0, 1, \ldots, d$, *dualne svojstvene vrijednosti od* $\mathcal{A}$. *Tada vrijedi:*

- $p_0(j) = 1, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, d$
- $q_0(j) = 1, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, d$
- $p_i(0) = n_i, \ \forall i = 0, 1, \ldots, d$
- $q_i(0) = m_i, \forall i = 0, 1, \ldots, d$
- $n_0 + n_1 + \ldots + n_d = n$
- $m_0 + m_1 + \ldots + m_d = n$

$$m_j = \mathrm{tr}(E_j)$$

Dualnost

matrično množenje	Schurov produkt
glavne idempotente E_j	Schurove idempotente A_i
$E_i E_j = \delta_{ij} E_i$	$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$
svojstvene vrijednosti $p_i(j)$ $A_i E_j = p_i(j) E_j$	dualne svojstvene vrijednosti $q_i(j)$ $E_i \circ A_j = \frac{1}{n} q_i(j) A_j$
presječni brojevi $p_{i,j}^k$ $A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{i,j}^k A_k$	Kreinovi parametri $q_{i,j}^k$ $E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^d q_{i,j}^k E_k$

Još neka korisna svojstva

Za $A, B \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$ vrijedi

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t B) \overset{\text{sim}}{=} \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} [B]_{k,i} \right) = \mathrm{sum}(A \circ B)$$

Još neka korisna svojstva

Za $A, B \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$ vrijedi

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B) \stackrel{\text{sim}}{=} \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i}\right) = \mathrm{sum}(A \circ B)$$

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova sa Schurovim idempotentama $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ i glavim idempotentama $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$. Za svaki $x \in \mathbb{C}^n$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{x^t A_i x}{nn_i} A_i = \sum_{j=0}^{d} \frac{x^t E_j x}{m_j} E_j.$$

Još neka korisna svojstva

Za $A, B \in \mathbb{C}[\mathcal{A}]$ vrijedi

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B) \stackrel{\text{sim}}{=} \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[B]_{k,i}\right) = \mathrm{sum}(A \circ B)$$

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova sa Schurovim idempotentama $\{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ i glavim idempotentama $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$. Za svaki $x \in \mathbb{C}^n$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{x^t A_i x}{n n_i} A_i = \sum_{j=0}^{d} \frac{x^t E_j x}{m_j} E_j.$$

Kažemo da je simetrična matrica M reda n kompatibilna s grafom X na n vrhova ako za sve vrhove u, v koji nisu susjedni vrijedi $M_{u,v} = 0$.

The clique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je C T-klika. Tada

$$|C| \leq \max_{M \in \mathcal{M}} \frac{\mathrm{sum}(M)}{\mathrm{tr}(M)},$$

pri čemu je $\mathcal{M}$ skup svih pozitivno semidefinitinih matrica u $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ koje su kompatibilne s X_T.

The clique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je C T-klika. Tada

$$|C| \leq \max_{M \in \mathcal{M}} \frac{\operatorname{sum}(M)}{\operatorname{tr}(M)},$$

pri čemu je $\mathcal{M}$ skup svih pozitivno semidefinitinih matrica u $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ koje su kompatibilne s X_T.

Korolar (Ratio bound for cliques)

Neka je X graf asocijacijske sheme stupnja k i neka je τ njegova najmanja svojstvena vrijednost. Neka je C klika u X. Tada

$$|C| \leq 1 - \frac{k}{\tau}.$$

Ako je C klika za koju se postiže jednakost, tada je karakteristični vektor x_C od C ortogonalan na svojstveni potprostor pridružen τ.

The coclique bound

Lema

Nema su M, N *matrice Bose-Mesnerove algebre asocijacijske sheme na* n *vrhova* $\mathcal{A}$*. Ako su* M *i* N *pozitivno semidefinitne i* $M \circ N = \alpha I$ *za neku konstantu* α*, tada*

$$\frac{\operatorname{sum}(M)}{\operatorname{tr}(M)} \frac{\operatorname{sum}(N)}{\operatorname{tr}(N)} \leq n.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $MN = \beta J$ *za neki* β*.*

The coclique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je S T-koklika. Tada

$$|S| \leq \min_{N \in \mathcal{N}} \frac{n \operatorname{tr}(N)}{\operatorname{sum}(N)},$$

pri čemu je $\mathcal{N}$ skup svih pozitivno semidefinitinih matrica u $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ koje su kompatibilne s X_T.

The coclique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je S T-koklika. Tada

$$|S| \leq \min_{N \in \mathcal{N}} \frac{n \operatorname{tr}(N)}{\operatorname{sum}(N)},$$

pri čemu je $\mathcal{N}$ skup svih pozitivno semidefinitinih matrica u $\mathbb{C}[\mathcal{A}]$ koje su kompatibilne s X_T.

Korolar (Ratio bound for cocliques)

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je X_T stupnja k_T i neka je τ_T njegova najmanja svojstvena vrijednost. Ako je S T-koklika, tada

$$|S| \leq \frac{n}{1 - \frac{k_T}{\tau_T}}.$$

EKR

Teorem

Svojstvena vrijednost od A_i u Johnsonovoj shemi $J(n,k)$ kojoj je pridružen j-ti svojstveni potprostor je

$$p_i(j) = \sum_{r=i}^{k} (-1)^{r-i+j} \binom{r}{i} \binom{n-2r}{k-r} \binom{n-r-j}{r-j}.$$

Kneserov graf $K(v,k)$ je graf kojemu je skup vrhova $X = \binom{V}{k}$, a dva su skupa (vrha) susjedna ako su pripadni podskupovi disjunktni.

Korolar

Svojstvene vrijednosti Kneserovog grafa $K(n,k)$ su

$$(-1)^i \binom{n-k-i}{k-i}, \text{za } i = 0, \ldots, k, \text{ s kratnostima } \binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}.$$

The clique-coclique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i X unija nekih od grafova iz $\mathcal{A}$. Neka je C klika, a S koklika u X. Tada

$$|C||S| \leq n.$$

Ako vrijedi jednakost, tada je za sve $j = 1, \ldots, d$

$$x^t E_j x y^t E_j y = 0,$$

pri čemu su x i y karakteristični vektori od C i S, redom.

The clique-coclique bound

Teorem

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i X unija nekih od grafova iz $\mathcal{A}$. Neka je C klika, a S koklika u X. Tada

$$|C||S| \leq n.$$

Ako vrijedi jednakost, tada je za sve $j = 1, \ldots, d$

$$x^t E_j x y^t E_j y = 0,$$

pri čemu su x i y karakteristični vektori od C i S, redom.

$\rightsquigarrow$ EKR ocjena u slučaju $k \mid n$

The clique-coclique bound

Korolar

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i $T \subseteq \{1, \dots, d\}$. Neka je C T-klika, a S T-koklika, te neka je $|C||S| = n$. Za sve $j > 0$ barem jedan od vektora $E_j x$ i $E_j y$ je nul-vektor.

Korolar

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i X unija nekih od grafova iz $\mathcal{A}$. Neka je C klika, a S koklika u X, te neka je $|C||S| = n$. Tada je $|C \cap S| = 1$.

The clique-coclique bound

Korolar

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$. Neka je C T-klika, a S T-koklika, te neka je $|C||S| = n$. Za sve $j > 0$ barem jedan od vektora $E_j x$ i $E_j y$ je nul-vektor.

Korolar

Neka je $\mathcal{A}$ asocijacijska shema na n vrhova s d klasa i X unija nekih od grafova iz $\mathcal{A}$. Neka je C klika, a S koklika u X, te neka je $|C||S| = n$. Tada je $|C \cap S| = 1$.

$\rightsquigarrow$ EKR ocjena za dizajne

EKR

Teorem

Neka su $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$. Neka je $\mathcal{F}$ presijecajuća familija k-podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$. Tada

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Za $n > 2k$ jednakost vrijedi ako i samo ako se $\mathcal{F}$ sastoji od svih k-podskupova koji sadrže jedan fiksirani element iz $\{1, \ldots, n\}$.

Karakterizacija skupova za koje se postiže jednakost $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$?

Postizanje jednakosti

Neka je $W_{t,k}$ matrica čiji su retci indeksirani t-članim, a stupci k-članim podskupovima od $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, te

$$(W_{t,k})_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha \subseteq \beta \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Teorem

U Johnsonovom grafu $J(n, k)$, i-ti svojstveni potprostor je ortogonalni komplement od $\mathrm{col}(W^t_{i-1,k})$ u $\mathrm{col}(W^t_{i,k})$ i dimenzije je $\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}$.

Postizanje jednakosti

- $\tau = -\binom{n-k-1}{k-1}$ s kratnosti $n-1$
- ratio bound for cocliques $\rightsquigarrow \alpha(K(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$
- dodatna informacija: ako vrijedi jednakost tada je karakteristični vektor odgovarajuće koklike linearna kombinacija $\mathbb{1}$ i svojstvenog vektora od $K(n,k)$ pridruženog τ
- familije k-podskupova kroz fiksnu točku su najveće koklike — jesu li jedine?
- karakteristični vektori su im retci od $W_{1,k}$

Postizanje jednakosti

- $\mathrm{col}(W^t_{1,k})$ potprostor razapet konstantnim vektorom i svojstvenim vektorima pridruženima τ

$\rightsquigarrow$ karakteristični vektor z najveće koklike leži u $\mathrm{col}(W^t_{1,k})$

$$\implies \quad (\exists h) \quad W^t_{1,k} h = z$$

- BSO $\alpha = \{1, \ldots, k\} \in S$
- za $n > 2k$ je $\mathrm{supp}\, h \subseteq \alpha$
- vrijedi za sve k-podskupove α iz S pa presjek k-poskupova sadrži $\mathrm{supp}(h)$ koji nije prazan

Hammingova shema $H(k, q)$

Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q. Hammingova udaljenost $d(x, y)$ riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$.

Definiramo graf G_i sa skupom vrhova X ($|X| = q^k$) tako da su dva vrha susjedna ako i samo ako je njihova Hammingova udaljenost jednaka i, za $i = 0, 1, \ldots, k$. Najveća moguća Hammingova udaljenost je k.

Hammingova shema $H(k, q)$

Neka je X skup svih riječi duljine k nad alfabetom veličine q za zadane k, q. Hammingova udaljenost $d(x, y)$ riječi x i y definirana je kao broj indeksa r takvih da je $x_r \neq y_r$.

Definiramo graf G_i sa skupom vrhova X ($|X| = q^k$) tako da su dva vrha susjedna ako i samo ako je njihova Hammingova udaljenost jednaka i, za $i = 0, 1, \ldots, k$. Najveća moguća Hammingova udaljenost je k.

Skup grafova $G_0, G_1, \ldots, G_k$ čini asocijacijsku shemu s k klasa, Hammingovu shemu $H(k, q)$.

EKR problem: određivanje najveće moguće kardinalnosti skupa riječi tako da se svake dvije podudaraju na barem t koordinata.

Dizajni

Kombinatorni dizajn s parametrima t-(v, k, λ) je familija k-članih podskupova (blokovi) n-članog skupa takva da za svaki t-člani podskup postoji točno λ elemenata familije koji ga sadrže.

Blok graf t-(v, k, λ) dizajna je graf čiji su vrhovi blokovi pripadnog dizajna, a dva vrha su susjedna akko se odgovarajući blokovi sijeku.

Dizajni

Kombinatorni dizajn s parametrima t-(v, k, λ) je familija k-članih podskupova (blokovi) n-članog skupa takva da za svaki t-člani podskup postoji točno λ elemenata familije koji ga sadrže.

Blok graf t-(v, k, λ) dizajna je graf čiji su vrhovi blokovi pripadnog dizajna, a dva vrha su susjedna akko se odgovarajući blokovi sijeku.

$\rightsquigarrow$ EKR tip teorema za 2-dizajne

Teorem

Najveći skup presijecajućih blokova u 2-$(v, k, 1)$ *dizajnu je kardinaliteta*

$$\frac{v-1}{k-1}.$$

Odnosno, nije veći od skupa svih blokova kroz jednu zajedničku točku.

Dizajni

Nije poznato za koje dizajne je to jedina najveća presijecajuća familija.

Teorem

Ako klika u blok grafu 2-$(v, k, 1)$ *dizajna nije familija koja se sastoji od svih blokova kroz jednu zajedničku točku, tada je klika kardinaliteta najviše* $k^2 - k + 1$.

Dizajni

Nije poznato za koje dizajne je to jedina najveća presijecajuća familija.

Teorem

Ako klika u blok grafu 2-$(v, k, 1)$ dizajna nije familija koja se sastoji od svih blokova kroz jednu zajedničku točku, tada je klika kardinaliteta najviše $k^2 - k + 1$.

The clique-coclique bound nam daje EKR ocjenu za t-$(v, k, 1)$ dizajne.

- različiti blokovi dizajna $\mathcal{D}$ imaju najviše $t-1$ točaka u presjeku
- blokovi čine T-kliku u Johnsonovoj shemi, $T = \{k-t+1, \dots, k\}$
- T-koklika je t-presijecajuća familija kardinaliteta najviše

$$\frac{\binom{v}{k}}{|\mathcal{D}|} = \binom{n-t}{k-t}$$

EKR za t-presijecajuće familije

Teorem

Ako je $n \geq (t+1)(k-t+1)$, tada je t-presijecajuća familija k-podskupova kardinaliteta najviše $\binom{n-t}{k-t}$. Ako je $n > (t+1)(k-t+1)$, jedina familija za koju se dostiže ocjena je ona koja se sastoji od svih k-podskupova koji sadrže fiksni t-podskup.

- clique-coclique bound daje ocjenu ako postoji odgovarajući dizajn
- pitanje postojanja određene semidefinitne matrice u Bose-Mesnerovoj algebri
- metričke sheme, Lagrangeovi interpolacijski polinomi

Literatura

- M. De Boeck, *The largest Erdős–Ko–Rado sets in* 2-$(v, k, 1)$ *designs*, Designs, Codes and Cryptography **75** (2014), no. 3, 465–481.
- P. Erdős, Chao Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 12:313–320, 1961.
- C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado theorems: algebraic approaches*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- S. Goryainov, E. V. Konstantinova, *Non-canonical maximum cliques without a design structure in the block graphs of 2-designs*, Designs, Codes and Cryptography **92** (2024), no. 11, 3665–3675.
- G. O. H. Katona, *A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem*, J. Combinatorial Theory Ser. B **13** (1972), 183–184.
- V. Krčadinac, *Asocijacijske sheme*, skripta, 2024.
- V. Krčadinac, *Kombinatorika*, skripta, 2024.

Hvala na pažnji!