Grassmannova shema i q-analogoni jako regularnih grafova i dizajna

Filip Martinović

Fakultet elektrotehnike i računarstva, Sveučilište u Zagrebu

Asocijacijske sheme, 1. srpnja 2024.

UNIVERSITY OF ZAGREB
Faculty of Electrical Engineering and Computing

Hrvatska zaklada za znanost

supported by Croatian Science Foundation project IP-2020-02-9752

q-analogoni

- 19. stoljeće
- hipergeometrijski redovi
- Rogers-Ramanujanovi identiteti
- q-specijalne funkcije (q-specijalne funkcije)
- osnova za Askey-Wilson klasifikaciju ortogonalnih polinoma
- $xp - qpx = 1$
- q-analogoni prirodnih brojeva

[0] svi primjeri preuzeti s [13] i [14], također vidi [7]

q-analogoni

Napomena (q-komutirajuće varijable, [3, str. 163])

Neka je $BA = qAB$ i označimo $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {n \brack k}_q A^k B^{n-k}$. Vrijedi:

- ${n \brack 0}_q = 1$
- ${n \brack 1}_q = \frac{1-q^n}{1-q}$
- ${n \brack k}_q = {n \brack n-k}_q$

- Kada definiramo $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$, tada je ${n \brack 1}_q = [n]_q$.
- Kada definiramo $[n]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$, tada je ${n \brack k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}$

Napomena

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = [n]_q!.$$

q-analogoni

Primjer (q-analogon Pascalovog identiteta, [12])

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q .$$

Jacques Tits je prvi uočio (vidi [11]):

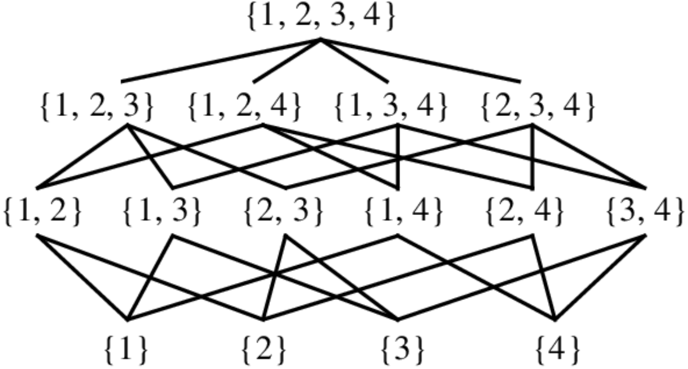
> kombinatorika u konačnim skupovima odgovara kombinatorici u konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima nad $\mathbb{F}_q$ „u limesu kada $q \to 1$".

Propozicija ([6, str. 3])

Broj k-dimenzionalnih prostora u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru nad poljem $\mathbb{F}_q$ je $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$. [a]

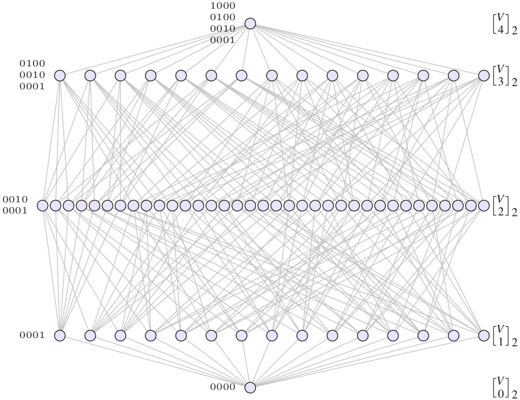
[a] zanimljiva poveznica ove tvrdnje i prebrojavanja Ferrerovih dijagrama (Youngovih tablica) može se naći u [9]

q-analogoni



(preuzeto iz [8])

q-analogoni



(preuzeto iz [4])

q-analogoni

Tablica iz [4]:

$q = 1$	q-analogon
skup	vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$
kardinalitet	dimenzija
k-podskupovi	k-dimenzionalni potprostori
$\binom{V}{k}$	$\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}_q$
$\subseteq$	$\leq$
$\cap$	$\cap$
$\cup$	$+$
elementi skupa	1-dimenzionalni potprostori
2-podskupovi	2-dimenzionalni potprostori

q-analogoni

Tablica iz [4]:

$q = 1$	q-analogon
skup	vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$
kardinalitet	dimenzija
k-podskupovi	k-dimenzionalni potprostori
$\binom{V}{k}$	$\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}_q$
$\subseteq$	$\leq$
$\cap$	$\cap$
$\cup$	$+$
1-podskupovi	1-dimenzionalni potprostori
2-podskupovi	2-dimenzionalni potprostori

Primjer ([4, str. 179])

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ i A potprostor od V dimenzije a. Za prirodan broj b, $a \leq b \leq n$, na koliko načina možemo izabrati potprostor B od V tako da je $A \leq B \leq V$?

q-analogoni grafova [1]

Definicija

Definiramo graf kao uređeni par (V, E), gdje je:

- V skup kardinaliteta n,
- E podskup od $\binom{V}{2}$.

Kažemo da su

- *vrhovi* grafa članovi skupa V,
- *bridovi* grafa članovi skupa E,
- vrhovi x i y *susjedi*, $x \sim y$, ako je $\{x, y\}$ brid grafa.

Zatvoreni skup susjednosti vrha x u grafu definiramo kao skup $\overline{N}(x)$ koji sadrži vrh x i sve njegove susjede.

q-analogoni grafova [1]

Definicija

Definiramo <u>graf</u> kao uređeni par (V, E), gdje je:

- V skup kardinaliteta n,
- E podskup od $\binom{V}{2}$.

Kažemo da su

- *vrhovi* grafa članovi skupa $\binom{V}{1}$,
- *bridovi* grafa članovi skupa E,
- vrhovi $\{x\}$ i $\{y\}$ *susjedi*, $x \sim y$, ako je $\{x\} \cup \{y\}$ brid grafa.

Zatvoreni skup susjednosti vrha $\{x\}$ u grafu definiramo kao skup $\overline{N}(x)$ koji je unija vrha $\{x\}$ i svih njegovih susjeda.

$$\overline{N}(x) = \{x\} \cup \{y \mid x \sim y\} = \bigcup \{u \in E \mid \{x\} \subseteq u\}$$

q-analogoni grafova [1]

Definicija

Definiramo $\underline{q\text{-graf}}$ kao uređeni par (W, E), gdje je:

- W vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije n,
- E podskup od $\begin{bmatrix} W \\ 2 \end{bmatrix}_q$.

Kažemo da su

- *vrhovi* q-grafa članovi skupa $\binom{W}{1}$,
- *bridovi* q-grafa članovi skupa E,
- vrhovi X i Y *susjedi*, $X \sim Y$, ako je $X + Y$ brid q-grafa.

Zatvoreni skup susjednosti vrha X u q-grafu definiramo kao skup $\overline{N}(X)$ koji je unija vrha X i svih njegovih susjeda.

$$\overline{N}(X) = X \cup \{Y \mid X \sim Y\} = \bigcup \{U \in E \mid X \leq U\}$$

q-analogoni grafova [1]

Napomena

Ako je $\overline{N}(X)$ potprostor od W, tada je broj susjeda od X dan kao

$$\left| \begin{bmatrix} \overline{N}(X) \\ 1 \end{bmatrix}_q \right| - 1 = \begin{bmatrix} \dim \overline{N}(X) \\ 1 \end{bmatrix}_q - 1 = [\dim \overline{N}(X)]_q - 1.$$

Napomena

Interpretacija q-grafa (W, E) u kontekstu projektivne geometrije $\mathrm{PG}(W)$.

q-analogoni grafova [1]

Neka je V skup kardinaliteta n i W vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije n.

Definicija

- Graf (V, E) je <u>regularan stupnja k</u>, ako je $\overline{N}(x) \in \binom{V}{k+1}$ za svaki vrh $\{x\} \in \binom{V}{1}$.
- q-graf (W, E) je <u>regularan stupnja k</u>, ako je $\overline{N}(X) \in \begin{bmatrix} W \\ k+1 \end{bmatrix}_q$ za svaki vrh $X \in \begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}_q$.

Napomena

Interpretacija regularnog q-grafa (W, E) stupnja k u kontekstu projektivne geometrije $\mathrm{PG}(W)$.

q-analogoni grafova [1]

Neka je V skup kardinaliteta n i W vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije n.

Definicija

Graf (V, E) je potpun, ako je $\overline{N}(x) = V$ za svaki vrh $\{x\} \in \binom{V}{1}$.
q-graf (W, E) je potpun, ako je $\overline{N}(X) = W$ za svaki vrh $X \in \begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}_q$.

Primjer

Potpuni q-graf (W, E) dan je za $E = \begin{bmatrix} W \\ 2 \end{bmatrix}_q$.

Napomena

Svaki q-graf daje nam primjer običnog grafa.

q-analogoni jako regularnih grafova [1]

Definicija

Za graf (V, E) kažemo da je jako regularan s parameterima $\mathrm{SRG}(v, k, \lambda, \mu)$, ako je

- V skup kardinaliteta n,
- graf (V, E) regularan stupnja k,
- za svaka dva različita vrha $\{y\}, \{z\} \in \binom{V}{1}$ vrijedi

$$|\{x \in V \,|\, x \sim y \text{ i } x \sim z\}| = \begin{cases} \lambda & , \quad y \sim z \\ \mu & , \quad y \nsim z \end{cases}.$$

q-analogoni jako regularnih grafova [1]

Definicija

Za q-graf (W, E) kažemo da je jako regularan s parameterima $\mathrm{SRG}_q(v, k, \lambda, \mu)$, ako je

- W vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije n,
- graf (W, E) regularan stupnja k,
- za svaka dva različita vrha $Y, Z \in \binom{W}{1}$ vrijedi

$$|\{X \in V \mid X \sim Y \text{ i } X \sim Z\}| = \begin{cases} \lambda & , \quad Y \sim Z \\ \mu & , \quad Y \not\sim Z \end{cases}.$$

q-analogoni jako regularnih grafova [1]

Propozicija

Ako je (V, E) jako regularan graf s parametrima $\mathrm{SRG}(v, k, \lambda, \mu)$, tada je

$$k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu.$$

Propozicija

Ako je (W, E) jako regularan q-graf s parameterima $\mathrm{SRG}_q(v, k, \lambda, \mu)$, tada je

$$([k + 1]_q - 1)([k + 1]_q - 2 - \lambda) = ([v]_q - [k + 1]_q)\mu.$$

q-analogoni jako regularnih grafova

Teorem ([2])

Ako postoji jako regularan q-graf s parametrima $\mathrm{SRG}_q(v, k, \lambda, \mu)$*, tada postoji jako regularan graf s parametrima* $\mathrm{SRG}([v]_q, [k+1]_q - 1, \lambda, \mu)$*.*

Općenito, problem q-analogona u kombinatorici jest što se može dogoditi da definirani objekti ne postoje te da se teoremi dokazuju za prazan skup!

q-analogoni jako regularnih grafova [1]

Primjer

- $\mathrm{SRG}_q(v, v-1, [v]_q - 2, \mu)$ potpuni q-graf (za sve $\mu \in \mathbb{N}_0$)
- $\mathrm{SRG}_q(v, t-1, [t]_q - 2, 0)$, $t \mid v$, disjunktna unija $\frac{[v]_q}{[t]_q}$ potpunih q-grafova u vektorskom prostoru $\dim = t$ nad $\mathbb{F}_q$ (geometrijska konstrukcija, spreadovi)
- $\mathrm{SRG}_q(v, v-2, \mu-2, \mu)$, gdje je $\mu = [v-2]_q$ (geometrijska konstrukcija, simplektički polariteti)

q-analogoni jako regularnih grafova [1]

Teorem

Ako postoji jako regularan q-graf s parametrima $\mathrm{SRG}_q(v, k, \lambda, \mu)$*, tada je to jedan od grafova iz prethodnog primjera.*

q-analogoni dizajna

Definicija

Za uređeni par (P, B) kažemo da je $\underline{t\text{-}(v, k, \lambda)\text{ dizajn}}$, ako vrijedi:

- P je skup kardinaliteta v,
- B je (multiskup) podskup od $\binom{P}{k}$,
- svaki $A \in \binom{P}{t}$ podskup je u točno λ blokova iz B.

Kažemo da su

- *točke* dizajna članovi skupa $\binom{P}{1}$,
- *blokovi* dizajna članovi skupa B.

q-analogoni dizajna

Definicija

Za uređeni par (W, B) kažemo da je $\underline{t\text{-}(v, k, \lambda)_q \text{ dizajn}}$, ako vrijedi:

- W je vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije v,
- B je (multiskup) podskup od $\begin{bmatrix} W \\ k \end{bmatrix}_q$,
- svaki $A \in \begin{bmatrix} W \\ t \end{bmatrix}_q$ potprostor je u točno λ blokova iz B.

Kažemo da su

- *točke* dizajna članovi skupa $\begin{bmatrix} W \\ 1 \end{bmatrix}_q$,
- *blokovi* dizajna članovi skupa B.

[0]vidi na primjer [4]

q-analogoni dizajna

Teorem

Ako postoji 2-$(v, k, \lambda)_q$ *q-dizajn, tada postoji i* 2-$([v]_q, [k]_q, \lambda)$ *dizajn.*

Propozicija

Ako je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ), tada je to i s-(v, k, λ_s) dizajn za $s = 0, \dots, t$, gdje je $\lambda_s = \lambda \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}$.

Propozicija

Ako je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima t-$(v, k, \lambda)_q$, tada je to i s-$(v, k, \lambda_s)_q$ dizajn za $s = 0, \dots, t$, gdje je $\lambda_s = \lambda \frac{\begin{bmatrix} v-s \\ t-s \end{bmatrix}_q}{\begin{bmatrix} k-s \\ t-s \end{bmatrix}_q}$.

q-analogoni dizajna

Teorem

Za svaki 2-(v, k, λ) *dizajn vrijedi* $bk = vr$ *i* $b \geq v$ *(Fisherova nejednakost).*

Teorem

Za svaki 2-$(v, k, \lambda)_q$ *dizajn vrijedi* $b[k]_q = [v]_q r$ *i* $b \geq [v]_q$ *(q-analogon Fisherove nejednakosti).*

jako regularni q-grafovi i q-analogoni simetričnih dizajna

Teorem (dizajn susjedstva, [5, str. 257])

Ako postoji jako regularan graf s parametrima $\mathrm{SRG}(v, k, \lambda, \mu)$ sa $\mu = \lambda$, tada postoji simetričan 2-(v, k, μ) dizajn.
Ako postoji jako regularan graf s parametrima $\mathrm{SRG}(v, k, \lambda, \mu)$ sa $\mu = \lambda + 2$, tada postoji simetričan 2-$(v, k+1, \mu)$ dizajn.
(Vrijedi i svojevrsni obrat.)

Teorem ([1])

Ako postoji jako regularan q-graf s parametrima $\mathrm{SRG}_q(v, k, \lambda, \mu)$ *sa* $\mu = \lambda + 2$, *tada postoji (simetričan?)* 2-$(v, k+1, \mu)_q$ *dizajn.*

q-analogon Johnsonove sheme

Neka su v i d prirodni brojevi uz $v \geq 2d$.

Definicija

Johnsonovu asocijacijsku shemu $J(v, d)$ na skupu S definiramo na zajedničkom skupu vrhova V i grafovima $G_0, \ldots, G_d$ na sljedeći način:

- S je skup kardinaliteta v
- $V := \binom{S}{d}$
- $(\forall i = 0, \ldots, d)$ definiramo susjednost grafa G_i s $X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} |X \cap Y| = d - i$

q-analogon Johnsonove sheme

Neka su v i d prirodni brojevi uz $v \geq 2d$.

Definicija

Grassmanovu asocijacijsku shemu $J_q(v, d)$ na prostoru S definiramo na zajedničkom skupu vrhova V i grafovima $G_0, \dots, G_d$ na sljedeći način:

- S je vektorski prostor nad $\mathbb{F}_q$ dimenzije v
- $V := \begin{bmatrix} S \\ d \end{bmatrix}_q$
- $(\forall i = 0, \dots, d)$ definiramo susjednost grafa G_i s $X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} \dim(X \cap Y) = d - i$

q-analogon Johnsonove sheme

Napomena

(P, B) čini t-(v, k, λ) dizajn ako i samo ako je B (multiskup) podskup skupa vrhova Johnsonove sheme $J(v, k)$ na skupu P sa svojstvom da je svaki $A \in \binom{P}{t}$ podskup točno λ vrhova iz B.

Napomena

(S, B) čini t-$(v, k, \lambda)_q$ dizajn ako i samo ako je B (multiskup) podskup skupa vrhova Grassmanove sheme $J_q(v, k)$ na prostoru S sa svojstvom da je svaki $A \in \begin{bmatrix} S \\ t \end{bmatrix}_q$ potprostor točno λ vrhova iz B.

q-analogon Johnsonove sheme

Teorem ([3, str. 121])

U Johnosonovoj shemi $J(v, d)$ na skupu S, s. vrijednosti od A_i na T_j su

$$p_{ij} = \sum_{r=i}^{k} (-1)^{r-i+j} \binom{r}{i} \binom{n-2r}{k-r} \binom{n-r-j}{r-j}$$

svaka multipliciteta $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$.

Teorem ([3, str. 172])

U Grassmanovoj shemi $J_q(v, d)$ na prostoru S, s. vrijednosti od A_i na T_j su

$$p_{ij} = \sum_{r=i}^{k} (-1)^{r-i+j} q^{\binom{r-i}{2} + \binom{j}{2} + r(k-j)} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-2r \\ k-r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-r-j \\ r-j \end{bmatrix}_q$$

svaka multipliciteta $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$.

Izvori I

Braun, Michael, Dean Crnković, Maarten De Boeck, Vedrana Mikulić Crnković i Andrea Švob: *q-analogs of strongly regular graphs*.
Linear Algebra and its Applications, 693:362–373, 2024, ISSN 0024-3795.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379523004159, Special issue on the 24th Conference of the International Linear Algebra Society.

Crnković, Dean: *q-ary strongly regular graphs*, 2024.
Talk presented at Combinatorics 2024, Carovigno, Italy.

Godsil, Christopher i Karen Meagher: *Erdõs–Ko–Rado Theorems: Algebraic Approaches*.
Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2015.

Izvori II

Greferath, Marcus, Mario Osvin Pavčević, Natalia Silberstein i Maria Àngeles Vázquez-Castro (urednici): *Network Coding and Subspace Designs*.
Signals and Communication Technology. Springer, 2018, ISBN 978-3-319-70292-6.

Haemers, Willem H.: *Matrices for graphs, designs and codes*.
U *Information security, coding theory and related combinatorics*, svezak 29 iz *NATO Sci. Peace Secur. Ser. D Inf. Commun. Secur.*, stranice 253–277. IOS, Amsterdam, 2011, ISBN 978-1-60750-662-1.

Krčadinac, Vedran: *Predavanja iz naprednog kolegija Asocijacijske sheme*.
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/asheme/`, ak. godina 2023/2024.

Izvori III

Martinjak, Ivica: *Predavanja iz naprednog kolegija Enumerativna kombinatorika*.
https://imartinjak.wordpress.com/teaching/doktorski/,
ak. godina 2022/2023.

Mauss, Jakob, Martin Sachenbacher i Robert Gmbh: *Conflict-driven diagnosis using relational aggregations*.
unkown journal, 2014.

Postnikov, Alexander: *Algebraic Combinatorics*.
https://ocw.mit.edu/courses/18-212-algebraic-combinatorics-spring-2019/0ed77654f610e0432a288bb27abc202d_MIT18_212S19_lec8.pdf,
2019.
Accessed: 2024-06-14. Notes taken by Andrew Lin.

Izvori IV

Stinson, Douglas R.: *Combinatorial designs: constructions and analysis*.
Springer, 1. izdanje, 2004,
ISBN 0387954872,9780387954875,9780387217376.

Tits, J.: *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*.
U *Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956*, Centre Belge de Recherches Mathématiques, stranice 261–289. Établissements Ceuterick, Louvain, 1957.

Wikipedia article: *Gaussian binomial coefficient*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_binomial_coefficient`.
Accessed: 2024-06-14.

Izvori V

Wikipedia article: *q-analog*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Q-analog.
Accessed: 2024-06-14.

Wolfram MathWorld article: *q-analog*.
https://mathworld.wolfram.com/q-Analog.html.
Accessed: 2024-06-14.

Hvala na pažnji!