Asocijacijske sheme

Vedran Krčadinac

5.7.2024.

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Iz povijesti kombinatornih dizajna...

$t = 2$:

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140.

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup vrhova Johnsonove sheme $\mathscr{D} \subseteq \binom{V}{d}$ kažemo da je dizajn s parametrima t-(v, d, λ) ako za svaki t-člani podskup od V postoji točno λ elemenata iz $\mathscr{D}$ koji ga sadrže. Elemente od V zovemo točkama, a elemente od $\mathscr{D}$ blokovima dizajna.

Iz povijesti kombinatornih dizajna...

$t = 2$:

F. Yates, *Incomplete randomized blocks*, Ann. Eugen. **7(2)** (1936), 121–140.

R. A. Fisher, *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, Ann. Eugen. **10** (1940), 52–75.

Fisherova nejednakost: $|\mathscr{D}| \geq v$

Delsarteova teorija

$t > 2$:

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275.

Delsarteova teorija

$t > 2$:

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275.

D. R. Hughes, *On t-designs and groups*, Amer. J. Math. **87** (1965), 761–778.

Delsarteova teorija

$t > 2$:

E. Witt, *Über Steinersche Systeme*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **12** (1938), 265–275.

D. R. Hughes, *On t-designs and groups*, Amer. J. Math. **87** (1965), 761–778.

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *Generalisation of Fisher's inequality to t-designs*, Notices Amer. Math. Soc. **18** (1971), 805.

Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost: $|\mathscr{D}| \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}$

Definicija.

Za podskup vrhova Hammingove sheme $\mathbb{O} \subseteq F^d$ kažemo da je "orthogonal array" s parametrima $OA_\lambda(t, d, q)$ ako je za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1, \ldots, d\}$ restrikcija riječi iz $\mathbb{O}$ na koordinate iz T multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup vrhova Hammingove sheme $\mathcal{O} \subseteq F^d$ kažemo da je "orthogonal array" s parametrima $OA_\lambda(t,d,q)$ ako je za svaki t-člani podskup koordinata $T \subseteq \{1,\ldots,d\}$ restrikcija riječi iz $\mathcal{O}$ na koordinate iz T multiskup koji sadrži svaku riječ iz F^t točno λ puta.

Iz povijesti "orthogonal arrays"...

C. R. Rao, *Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays*, Suppl. J. Roy. Statist. Soc. **9** (1947), 128–139.

Raova nejednakost: $|\mathcal{O}| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{d}{i} (q-1)^i$

Delsarteova teorija

Analogija:

Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost:

$$|\mathcal{D}| \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}$$

Raova nejednakost:

$$|\mathcal{C}| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{d}{i} (q-1)^i$$

Analogija:

Ray-Chaudhuri – Wilsonova nejednakost:

$$|\mathscr{D}| \geq \binom{v}{\lfloor t/2 \rfloor} = \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \left[\binom{v}{i} - \binom{v}{i-1} \right]$$

Raova nejednakost:

$$|\mathscr{C}| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{d}{i} (q-1)^i$$

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Definicija.

Neka je $\mathscr{X}$ Q-polinomijalna asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$. Podskup vrhova $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako odgovarajuća indikatorska funkcija f_Y zadovoljava $E_i f_Y = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Definicija.

Neka je $\mathfrak{X}$ Q-polinomijalna asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$. Podskup vrhova $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako odgovarajuća indikatorska funkcija f_Y zadovoljava $E_i\, f_Y = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Teorem.

Neka je $\mathfrak{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathfrak{X}$, onda je $\displaystyle |Y| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} m_i$.

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Definicija.

Neka je $\mathcal{X}$ Q-polinomijalna asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$. Podskup vrhova $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako odgovarajuća indikatorska funkcija f_Y zadovoljava $E_i f_Y = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Teorem.

Neka je $\mathcal{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathcal{X}$, onda je $|Y| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} m_i$.

Kratnosti Johnsonove sheme $J(v, d)$ su $m_i = \binom{v}{i} - \binom{v}{i-1}$

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Definicija.

Neka je $\mathscr{X}$ Q-polinomijalna asocijacijska shema sa skupom vrhova X i primitivnim idempotentama $E_0, \ldots, E_d$. Podskup vrhova $Y \subseteq X$ je t-dizajn ako odgovarajuća indikatorska funkcija f_Y zadovoljava $E_i f_Y = 0$ za $i = 1, \ldots, t$.

Teorem.

Neka je $\mathscr{X}$ Q-polinomijalna shema s kratnostima $m_0, \ldots, m_d$. Ako je Y t-dizajn u $\mathscr{X}$, onda je $|Y| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} m_i$.

Kratnosti Hammingove sheme $H(d, q)$ su $m_i = \binom{d}{i}(q-1)^i$

Möbiusova inverzija

August Ferdinand Möbius (1790.-1868.), njemački matematičar.

Teorem (Möbius, 1832.)

Za svake dvije funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je

(a) $g(m) = \sum_{d \mid m} f(d), \ \forall m \in \mathbb{N},$

(b) $f(m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, g(\frac{m}{d}), \ \forall m \in \mathbb{N}.$

Möbiusova inverzija

August Ferdinand Möbius (1790.-1868.), njemački matematičar.

Teorem (Möbius, 1832.)

Za svake dvije funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je

(a) $g(m) = \sum_{d \mid m} f(d), \;\; \forall m \in \mathbb{N},$

(b) $f(m) = \sum_{d \mid m} \mu(d)\, g(\frac{m}{d}), \;\; \forall m \in \mathbb{N}.$

Teorem.

Za svake dvije funkcije $f, g : 2^N \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je

(a) $g(I) = \sum_{J \subseteq I} f(J), \;\; \forall I \subseteq N,$

(b) $f(I) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} g(J), \;\; \forall I \subseteq N.$

Möbiusova inverzija

Korolar (Binomna inverzija).

Za svake dvije funkcije $f, g : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je

(a) $g(i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f(j), \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

(b) $f(i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j), \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, Wiley, New York, 1958.

Möbiusova inverzija

G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **2** (1964), 340–368.

Teorem.

Za svake dvije funkcije $f, g \in I(P)$ ekvivalentno je

(a) $$g(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} f(x,z),\ \ \forall x,y \in X,$$

(b) $$f(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} g(x,z)\mu(z,y),\ \ \forall x,y \in X.$$

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Asocijacijska shema $\mathfrak{X}$ ne mora biti P-polinomijalna niti Q-polinomijalna da bismo mogli definirati minimalnu udaljenost, stupanj i snagu podskupa vrhova $Y \subseteq X$!

Delsarteova teorija

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Asocijacijska shema $\mathfrak{X}$ ne mora biti P-polinomijalna niti Q-polinomijalna da bismo mogli definirati minimalnu udaljenost, stupanj i snagu podskupa vrhova $Y \subseteq X$!

Unutarnja distribucija: $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Asocijacijska shema $\mathfrak{X}$ ne mora biti P-polinomijalna niti Q-polinomijalna da bismo mogli definirati minimalnu udaljenost, stupanj i snagu podskupa vrhova $Y \subseteq X$!

Unutarnja distribucija: $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

Dualna distribucija: $a^*(Y) = (a_0^*, \ldots, a_d^*) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $a^*(Y) = a(Y)Q$

P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. **10** (1973), vi+97 pp.

Asocijacijska shema $\mathfrak{X}$ ne mora biti P-polinomijalna niti Q-polinomijalna da bismo mogli definirati minimalnu udaljenost, stupanj i snagu podskupa vrhova $Y \subseteq X$!

Unutarnja distribucija: $a(Y) = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$a_i = \frac{1}{|Y|} |R_i \cap (Y \times Y)|, \quad i = 0, \ldots, d$$

Dualna distribucija: $a^*(Y) = (a_0^*, \ldots, a_d^*) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $a^*(Y) = a(Y)Q$

Indikatorska funkcija:

$$f_Y : X \to \{0, 1\}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in Y \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Delsarteova teorija

Propozicija.

Za komponente unutarnje distribucije i dualne distribucije od Y vrijedi:

1. $a_0 = 1$
2. $a_0^* = \sum_{i=0}^{d} a_i = |Y|$
3. $a_i = \frac{1}{|Y|} f_Y^\tau A_i f_Y$
4. $a_i^* = 0 \iff E_i f_Y = 0$

Delsarteova teorija

Propozicija.

Za komponente unutarnje distribucije i dualne distribucije od Y vrijedi:

1. $a_0 = 1$
2. $a_0^* = \sum_{i=0}^d a_i = |Y|$
3. $a_i = \frac{1}{|Y|} f_Y^\tau A_i f_Y$
4. $a_i^* = 0 \iff E_i f_Y = 0$

Za vektor $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ definiramo:

$$m(u) = \min\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid u_i \neq 0\}$$

$$s(u) = |\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid u_i \neq 0\}|$$

$$t(u) = \max\{i \in \{1, \ldots, d\} \mid u_1 = \ldots = u_i = 0\}$$

Delsarteova teorija

Propozicija.

Za komponente unutarnje distribucije i dualne distribucije od Y vrijedi:

1. $a_0 = 1$
2. $a_0^* = \sum_{i=0}^d a_i = |Y|$
3. $a_i = \frac{1}{|Y|} f_Y^\tau A_i f_Y$
4. $a_i^* = 0 \iff E_i f_Y = 0$

Za vektor $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ definiramo:

$$m(u) = \min\{i \in \{1,\ldots,d\} \mid u_i \neq 0\}$$

$$s(u) = |\{i \in \{1,\ldots,d\} \mid u_i \neq 0\}|$$

$$t(u) = \max\{i \in \{1,\ldots,d\} \mid u_1 = \ldots = u_i = 0\}$$

$$m(u) = t(u) + 1$$

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup asocijacijske sheme $Y \subseteq X$ s unutarnjom distribucijom $a(Y)$ i dualnom distribucijom $a^*(Y)$ definiramo:

1. minimalnu udaljenost kao $\delta = m(a(Y))$
2. dualnu minimalnu udaljenost kao $\delta^* = m(a^*(Y))$
3. stupanj kao $s = s(a(Y))$
4. dualni stupanj kao $s^* = s(a^*(Y))$
5. snagu kao $t = t(a^*(Y))$

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup asocijacijske sheme $Y \subseteq X$ s unutarnjom distribucijom $a(Y)$ i dualnom distribucijom $a^*(Y)$ definiramo:

1. minimalnu udaljenost kao $\delta = m(a(Y))$
2. dualnu minimalnu udaljenost kao $\delta^* = m(a^*(Y))$
3. stupanj kao $s = s(a(Y))$
4. dualni stupanj kao $s^* = s(a^*(Y))$
5. snagu kao $t = t(a^*(Y))$

$$\delta^* = t + 1, \qquad \delta = t(a(Y)) + 1$$

Delsarteova teorija

Definicija.

Za podskup asocijacijske sheme $Y \subseteq X$ s unutarnjom distribucijom $a(Y)$ i dualnom distribucijom $a^*(Y)$ definiramo:

1. minimalnu udaljenost kao $\delta = m(a(Y))$
2. dualnu minimalnu udaljenost kao $\delta^* = m(a^*(Y))$
3. stupanj kao $s = s(a(Y))$
4. dualni stupanj kao $s^* = s(a^*(Y))$
5. snagu kao $t = t(a^*(Y))$

$$\delta^* = t + 1, \qquad \delta = t(a(Y)) + 1$$

Propozicija.

U P-polinomijalnoj shemi minimalna udaljenost δ od Y podudara se s

$$\min\{\partial(x, y) \mid x, y \in Y,\ x \neq y\}$$

Delsarteova teorija

Zadatak.

Neka je $\mathcal{X}$ Johnsonova shema $J(v,d)$. Stupanj kombinatornog dizajna $Y \subseteq X$ definirali smo kao broj različitih veličina presjeka $|x \cap y|$ za $x, y \in Y$, $x \neq y$. Pokažite da taj broj odgovara stupnju $s = s(a(Y))$.

Delsarteova teorija

Zadatak.

Neka je $\mathcal{X}$ Johnsonova shema $J(v,d)$. Stupanj kombinatornog dizajna $Y \subseteq X$ definirali smo kao broj različitih veličina presjeka $|x \cap y|$ za $x, y \in Y$, $x \neq y$. Pokažite da taj broj odgovara stupnju $s = s(a(Y))$.

Zadatak.

Neka je $\mathcal{X}$ Hammingova shema $H(d,q)$ nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Ako je $Y \leq X$ linearni kod, odgovara li dualna minimalna udaljenost

$$\delta^* = m(a^*(Y))$$

minimalnoj udaljenosti dualnog koda?

$$Y^\perp = \{x \in X \mid x \cdot y = 0, \forall y \in Y\}$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$u = a(Y)$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$u = a(Y) \;\; \Rightarrow$

$$s^* = s(a^*(Y)) = s(a(Y)Q) \geq \lfloor t(a(Y))/2 \rfloor = \lfloor (\delta - 1)/2 \rfloor$$

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$u = a(Y) \ \Rightarrow$

$$s^* = s(a^*(Y)) = s(a(Y)Q) \geq \lfloor t(a(Y))/2 \rfloor = \lfloor (\delta - 1)/2 \rfloor$$

Korolar.

$$\delta \leq 2s^* + 1$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$u = a^*(Y)$,

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$u = a^*(Y), \quad PQ = nI,$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$$u = a^*(Y), \quad PQ = nI, \quad a^*(Y) = a(Y)Q$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$$u = a^*(Y), \quad PQ = nI, \quad a^*(Y) = a(Y)Q \;\; \Rightarrow \;\; n\,a(Y) = a^*(Y)P$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$$u = a^*(Y), \quad PQ = nI, \quad a^*(Y) = a(Y)Q \;\; \Rightarrow \;\; n\, a(Y) = a^*(Y)P$$

$$s = s(a(Y)) = s(n\, a(Y)) = s(a^*(Y)P)$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$$u = a^*(Y), \quad PQ = nI, \quad a^*(Y) = a(Y)Q \ \Rightarrow \ n\,a(Y) = a^*(Y)P$$

$$s = s(a(Y)) = s(n\,a(Y)) = s(a^*(Y)P)$$

$$s \geq \lfloor t(a^*(Y))/2 \rfloor = \lfloor t/2 \rfloor = \lfloor (\delta^* - 1)/2 \rfloor$$

Delsarteova teorija

Teorem (MacWilliamsina nejednakost)

Neka je $\mathcal{X}$ asocijacijska shema sa svojstvenom matricom P i dualnom svojstvenom matricom Q. Neka je $u = (u_0, u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ bilo koji vektor s nultom komponentom $u_0 \neq 0$.

1. Ako je shema P-polinomijalna, onda vrijedi $s(uQ) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$
2. Ako je shema Q-polinomijalna, onda vrijedi $s(uP) \geq \lfloor t(u)/2 \rfloor$

$$u = a^*(Y), \quad PQ = nI, \quad a^*(Y) = a(Y)Q \;\Rightarrow\; n\,a(Y) = a^*(Y)P$$

$$s = s(a(Y)) = s(n\,a(Y)) = s(a^*(Y)P)$$

$$s \geq \lfloor t(a^*(Y))/2 \rfloor = \lfloor t/2 \rfloor = \lfloor (\delta^* - 1)/2 \rfloor$$

Korolar.

$$t \leq 2s, \qquad \delta^* \leq 2s + 1$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako postoji kod s parametrima $(d, M, \delta)_q$ i ako je $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$M \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq q^n$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \le |X|$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq |X|$$

Generalizacija na P-polinomijalnu shemu:

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor\frac{\delta-1}{2}\rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \le |X|$$

Generalizacija na P-polinomijalnu shemu:

$$K(x,e) = \{y \in X \mid \partial(x,y) \le e\}$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq |X|$$

Generalizacija na P-polinomijalnu shemu:

$$K(x,e) = \{y \in X \mid \partial(x,y) \leq e\}$$

$$|K(x,e)| = n_0 + \ldots + n_e$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq |X|$$

Generalizacija na P-polinomijalnu shemu:

$$K(x,e) = \{y \in X \mid \partial(x,y) \leq e\}$$

$$|K(x,e)| = n_0 + \ldots + n_e$$

$$e = \lfloor \tfrac{\delta-1}{2} \rfloor \quad \Rightarrow \quad K(x,e) \cap K(y,e) = \emptyset \quad \text{za} \quad x,y \in Y,\, x \neq y$$

Delsarteova teorija

Propozicija (Ocjena pakiranja kugli)

Ako je Y podskup od $H(d,q)$ s min. udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda vrijedi

$$|Y| \cdot \sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq |X|$$

Generalizacija na P-polinomijalnu shemu:

$$K(x,e) = \{y \in X \mid \partial(x,y) \leq e\}$$

$$|K(x,e)| = n_0 + \ldots + n_e$$

$$e = \lfloor \tfrac{\delta-1}{2} \rfloor \;\;\Rightarrow\;\; K(x,e) \cap K(y,e) = \emptyset \;\;\text{za}\;\; x,y \in Y,\, x \neq y$$

$$|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$$

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathcal{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathcal{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

Ako se dostiže jednakost, onda je $e = s^*$ dualni stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta = 2s^* + 1$. Tada su svojstvene vrijednosti θ_j za koje je $a_j^* \neq 0$ nultočke polinoma $\Psi_e(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_e(x)$.

Delsarteova teorija

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathcal{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

Ako se dostiže jednakost, onda je $e = s^*$ dualni stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta = 2s^* + 1$. Tada su svojstvene vrijednosti θ_j za koje je $a_j^* \neq 0$ nultočke polinoma $\Psi_e(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_e(x)$.

$\theta_j = P_1(j)$, $j = 0, \ldots, d$ su svojstvene vrijednosti od A_1.

Delsarteova teorija

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathcal{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

Ako se dostiže jednakost, onda je $e = s^*$ dualni stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta = 2s^* + 1$. Tada su svojstvene vrijednosti θ_j za koje je $a_j^* \neq 0$ nultočke polinoma $\Psi_e(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_e(x)$.

$\theta_j = P_1(j)$, $j = 0, \ldots, d$ su svojstvene vrijednosti od A_1.

$f_i \in \mathbb{R}[x]$ su zadani rekurzijom $f_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}} \Big[(x - a_i) f_i(x) - b_{i-1} f_{i-1}(x)\Big]$

Delsarteova teorija

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathcal{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

Ako se dostiže jednakost, onda je $e = s^*$ dualni stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta = 2s^* + 1$. Tada su svojstvene vrijednosti θ_j za koje je $a_j^* \neq 0$ nultočke polinoma $\Psi_e(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_e(x)$.

$\theta_j = P_1(j)$, $j = 0, \ldots, d$ su svojstvene vrijednosti od A_1.

$f_i \in \mathbb{R}[x]$ su zadani rekurzijom $f_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}} \left[(x - a_i) f_i(x) - b_{i-1} f_{i-1}(x) \right]$

Polinom f_i je stupnja i te vrijedi $A_i = f_i(A_1)$ i $P_i(j) = f_i(\theta_j)$

Delsarteova teorija

S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

Teorem ("Lloydovog tipa")

Neka je $\mathscr{X}$ P-polinomijalna shema, Y podskup vrhova s minimalnom udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$. Onda vrijedi $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq |X|$.

Ako se dostiže jednakost, onda je $e = s^*$ dualni stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta = 2s^* + 1$. Tada su svojstvene vrijednosti θ_j za koje je $a_j^* \neq 0$ nultočke polinoma $\Psi_e(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_e(x)$.

$\theta_j = P_1(j)$, $j = 0, \ldots, d$ su svojstvene vrijednosti od A_1.

$f_i \in \mathbb{R}[x]$ su zadani rekurzijom $f_{i+1}(x) = \frac{1}{c_{i+1}} \Big[(x - a_i) f_i(x) - b_{i-1} f_{i-1}(x) \Big]$

Polinom f_i je stupnja i te vrijedi $A_i = f_i(A_1)$ i $P_i(j) = f_i(\theta_j)$

Podskup Y koji dostiže jednakost zovemo savršenim kodom u shemi $\mathscr{X}$, a polinom $\Psi_e(x)$ zovemo Lloydovim polinomom.

Dualni teoremi:

Ako je shema P-polinomijalna, a Y podskup minimalne udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq n$.

Ako je shema Q-polinomijalna, a Y podskup dualne min. udaljenosti δ^* ili snage $t = \delta^* - 1$ i $e = \lfloor \frac{\delta^*-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$.

Dualni teoremi:

Ako je shema P-polinomijalna, a Y podskup minimalne udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq n$.

Ako je shema Q-polinomijalna, a Y podskup dualne min. udaljenosti δ^* ili snage $t = \delta^* - 1$ i $e = \lfloor \frac{\delta^*-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$.

Teorem.

Ako vrijedi jednakost $|Y| = m_0 + \ldots + m_e$, onda je $e = s$ stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta^* = 2s + 1$, odnosno $t = 2s$. Tada su dualne svojstvene vrijednosti θ_j^* za koje je $a_j \neq 0$ nultočke od $\Psi_e^*(x) = g_0(x) + \ldots + g_e(x)$.

Delsarteova teorija

Dualni teoremi:

Ako je shema P-polinomijalna, a Y podskup minimalne udaljenosti δ i $e = \lfloor \frac{\delta-1}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \cdot (n_0 + \ldots + n_e) \leq n$.

Ako je shema Q-polinomijalna, a Y podskup dualne min. udaljenosti δ^* ili snage $t = \delta^* - 1$ i $e = \lfloor \frac{\delta^*-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$, onda je $|Y| \geq m_0 + \ldots + m_e$.

Teorem.

Ako vrijedi jednakost $|Y| = m_0 + \ldots + m_e$, onda je $e = s$ stupanj od Y i vrijedi jednakost $\delta^* = 2s + 1$, odnosno $t = 2s$. Tada su dualne svojstvene vrijednosti θ_j^* za koje je $a_j \neq 0$ nultočke od $\Psi_e^*(x) = g_0(x) + \ldots + g_e(x)$.

Dizajne koji dostižu "generaliziranu Fisherovu nejednakost" zovemo napetim dizajnima u Q-polinomijalnoj shemi $\mathcal{X}$, a polinom $\Psi_e^*(x)$ zovemo Wilsonovim polinomom.

Delsarteova teorija

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Teorem.

Ako postoji napeti $2e$-(v, d, λ) dizajn, onda ima točno e različitih presječnih brojeva. Presječni brojevi su pozitivni i nultočke su sljedećeg polinoma stupnja e:

$$\Psi_e^*(x) = \sum_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \frac{\binom{v-e}{i}\binom{d-i}{e-i}\binom{d-1-i}{e-i}}{\binom{e}{i}} \binom{x}{i}$$

Delsarteova teorija

D. Ray-Chaudhuri, R. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.

Teorem.

Ako postoji napeti $2e$-(v, d, λ) dizajn, onda ima točno e različitih presječnih brojeva. Presječni brojevi su pozitivni i nultočke su sljedećeg polinoma stupnja e:

$$\Psi_e^*(x) = \sum_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \frac{\binom{v-e}{i}\binom{d-i}{e-i}\binom{d-1-i}{e-i}}{\binom{e}{i}} \binom{x}{i}$$

Napeti dizajni:

$t = 2,\ e = 1 \rightsquigarrow$ simetrični dizajni, $b = \binom{v}{1} = v$

Delsarteova teorija

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima 2-(v, d, λ) simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka 2-(v, d, λ) dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

Delsarteova teorija

Teorem.

Ako je dizajn s parametrima 2-(v, d, λ) simetričan, onda se svaka dva bloka tog dizajna sijeku u λ točaka. Obrnuto, ako se svaka dva bloka 2-(v, d, λ) dizajna sijeku u konstantnom broju točaka, onda je taj broj λ, a dizajn je simetričan.

$t = 4$, $e = 2$ $\rightsquigarrow$ kvazisimetrični dizajni, $b = \binom{v}{2}$, presječni brojevi $x < y$

Teorem (N. Ito, H. Enomoto, R. Noda, A. Bremner, 1975.-79.)

Postoji samo jedan takav dizajn s parametrima 4-$(23, 7, 1)$ i presječnim brojevima $x = 1$, $y = 3$

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, De Gruyter, 2021. Teorem 3.32, str. 136-142.

Delsarteova teorija

$t = 6,\ e = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

Delsarteova teorija

$t = 6$, $e = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 2e$, $e \geq 4 \rightsquigarrow$ najviše konačno mnogo

E. Bannai, *On tight designs*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 433–448.

Delsarteova teorija

$t = 6$, $e = 3 \rightsquigarrow$ **ne postoje**

C. Peterson, *On tight 6-designs*, Osaka J. Math. **14** (1977), 417–435.

$t = 2e$, $e \geq 4 \rightsquigarrow$ najviše konačno mnogo

E. Bannai, *On tight designs*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 433–448.

Zadatak.

Istražite što je poznato o savršenim kodovima u Johnsonovoj shemi i o napetim dizajnima u Hammingovoj shemi, tj. $OA_\lambda(t, d, q)$ koji dostižu Raovu nejednakost

$$|Y| \geq \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \binom{d}{i} (q-1)^i$$

N. Silberstein, *Properties of codes in the Johnson scheme*, magistarski rad, Technion, Haifa, 2007. https://arxiv.org/pdf/1004.4882

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (**poglavlje 3** i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i **poglavlje 4**)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)

Teorem (Assmus-Mattson)

Neka je $C \leq \mathbb{F}^n$ kod s parametrima $[n, m, d]_q$ i neka dualni kod $C^\perp$ ima parametre $[n, n-m, d^\perp]_q$. Neka su B_i koeficijenti težinskog polinoma dualnog koda: $W_{C^\perp}(X, Y) = \sum_{i=0}^{d} B_i X^{n-i} Y^i$. Neka je $t < d$ takav da je najviše $d - t$ koeficijenata $B_1, \ldots, B_{n-t}$ različito od nule. Tada za svaki $\Bbbk$ koji zadovoljava $d \leq \Bbbk \leq \Bbbk_{\max}$ skup svih nosača vektora težine $\Bbbk$ u kodu C čini t-dizajn (ako postoje takvi vektori). Nadalje, za svaki $\Bbbk$ koji zadovoljava $d^\perp \leq \Bbbk \leq \min\{n-t, \Bbbk_{\max}^\perp\}$ skup svih nosača vektora težine $\Bbbk$ u dualnom kodu $C^\perp$ čini t-dizajn (ako postoje takvi vektori).

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (**poglavlje 5**)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)

Projiciramo vektore kanonske baze na svojstveni potprostor V_1 jako regularnog grafa:

$$x_i = E_1 e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Normalizirani vektori $\overline{x}_i = \sqrt{n}\, x_i$ su jedinični vektori u svojstvenom potprostoru $V_1 \equiv \mathbb{R}^f$ i zovemo ih euklidskom reprezentacijom jako regularnog grafa. To je sferni kod veličine n i stupnja dva u $\mathbb{R}^f$.

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (**poglavlje 5**)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)

Teorem.

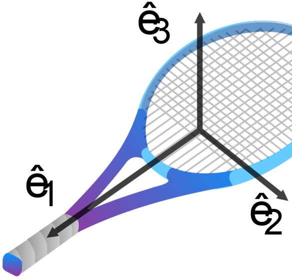
Neka je G primitivan jako regularan graf i X njegova euklidska reprezentacija u jednom od netrivijalnih svojstvenih potprostora V_1 ili V_2.

- X je uvijek sferni 2-dizajn.
- X je sferni 3-dizajn ako i samo ako G dostiže odgovarajući Kreinov uvjet: $q_{11}^1 = 0$ ako smo projicirali na V_1, a $q_{22}^2 = 0$ ako smo projicirali na V_2.
- X je sferni 4-dizajn ako i samo ako G dostiže odgovarajuću apsolutnu ocjenu: $n = \frac{1}{2}f(f+3)$ za V_1, a $n = \frac{1}{2}g(g+3)$ za V_2.
- X nikad nije sferni 5-dizajn.

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (**poglavlje 5**)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (poglavlje 6)



Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

6.4.3 Towards the classification of P- and Q-polynomial schemes

This section is about the classification of P- and Q-polynomial schemes: how the classification problem of them arose and developed, what the present status is, and how it, in our personal view, could finish.

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

6.4.3 Towards the classification of P- and Q-polynomial schemes

This section is about the classification of P- and Q-polynomial schemes: how the classification problem of them arose and developed, what the present status is, and how it, in our personal view, could finish.

The main families of P- and Q-polynomial schemes are related to permutation representations of Chevalley groups, which will be discussed in later chapters. Explicit calculations of the spherical functions for these permutation representations (or the character tables of the corresponding association schemes) were given by Stanton [436, 437, 438], Dunkl [174], etc. In these papers, it was first shown that they

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

are P- and Q-polynomial schemes. For special cases, there are lots of various studies. Through these studies, together with the work by researchers in representation theory of Chevalley groups, the understanding of orthogonal polynomials and spherical functions has been deepened. Following this development, algebraic combinatorics began. It started with the study of P- and Q-polynomial schemes, and developed to the study of (the character tables of) general commutative association schemes. For

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

Chevalley groups [edit]

Chevalley groups can be thought of as Lie groups over finite fields. The theory was clarified by the theory of algebraic groups, and the work of Chevalley (1955) on Lie algebras, by means of which the *Chevalley group* concept was isolated. Chevalley constructed a Chevalley basis (a sort of integral form but over finite fields) for all the complex simple Lie algebras (or rather of their universal enveloping algebras), which can be used to define the corresponding algebraic groups over the integers. In particular, he could take their points with values in any finite field. For the Lie algebras A_n, B_n, C_n, D_n this gave well known classical groups, but his construction also gave groups associated to the exceptional Lie algebras E_6, E_7, E_8, F_4, and G_2. The ones of type G_2 (sometimes called *Dickson groups*) had already been constructed by Dickson (1905), and the ones of type E_6 by Dickson (1901).

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

Bannai, who was at Ohio State University and gave lectures on Delsarte theory in 1979, came to realize that P-polynomial schemes are the finite analogue of compact 2-point homogeneous spaces and Q-polynomial schemes are that of compact symmetric spaces of rank 1. From this point of view, since compact symmetric spaces are classified by Élie Cartan and since it is known by the theorem of Hsien Chung Wang that compact 2-point homogeneous spaces are symmetric spaces of rank 1, and vice versa [503], it is possible to guess how to collect examples of P-/Q-polynomial schemes as their finite analogue. Thus Bannai made a list of P- and Q-polynomial schemes; he also

Što još ima u knjizi?

E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, R. Tanaka, *Algebraic combinatorics*, 2021.

1. Delsarteova teorija: kodovi i dizajni u asocijacijskim shemama (poglavlje 3 i poglavlje 4)
2. Konačni podskupovi sfera i drugih prostora (poglavlje 5)
3. Još o P-polinomijalnim i Q-polinomijalnim shemama (**poglavlje 6**)

their finite analogue. Thus Bannai made a list of P- and Q-polynomial schemes; he also referred to the spherical functions on homogeneous spaces of finite Chevalley groups by certain maximal parabolic subgroups, which had been in a timely manner calculated by D. Stanton [435]. Based on this list, Bannai proposed the classification of P- and Q-polynomial schemes with the following conjecture:

(1) P- and Q-polynomial schemes with sufficiently large diameter are either in the list or "relatives" of those in the list.

(2) Primitive P-polynomial schemes with sufficiently large diameter are Q-polynomial. Conversely, primitive Q-polynomial schemes with sufficiently large diameter are P-polynomial.

P. Terwilliger, *Algebraic combinatorics: association schemes*, University of Wisconsin, 2023.

https://people.math.wisc.edu/~pmterwil/Htmlfiles/asAll.pdf

25 Some open problems

In this section we give some open problems related to association schemes and graph theory in general. These problems are at the research level; an elegant solution or substantial progress is surely publishable. The problems are in a raw form; feel free to adjust any given problem into a more elegant or suitable form.

Research

W. T. Gowers, *The two cultures of mathematics*, u *Mathematics: frontiers and perspectives* (ur. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax i B. Mazur), Amer. Math. Soc., 2000., str. 65–78.

https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

W. T. Gowers, *The two cultures of mathematics*, u *Mathematics: frontiers and perspectives* (ur. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax i B. Mazur), Amer. Math. Soc., 2000., str. 65–78.

https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf

The “two cultures” I wish to discuss will be familiar to all professional mathematicians. Loosely speaking, I mean the distinction between mathematicians who regard their central aim as being to solve problems, and those who are more concerned with building and understanding theories. This difference of attitude has been remarked on by many people, and I do not claim any credit for noticing it. As with most categorizations, it involves a certain oversimplification, but not so much as to make it useless. If you are unsure to which class you belong, then consider the following two statements.

(i) The point of solving problems is to understand mathematics better.

(ii) The point of understanding mathematics is to become better able to solve problems.

Research

1. Dizajni snage 3 i stupnja 3

Research

1. Dizajni snage 3 i stupnja 3
2. Sustavi spojenih simetričnih dizajna

Research

1. Dizajni snage 3 i stupnja 3
2. Sustavi spojenih simetričnih dizajna
3. Kada podshema dolazi od vlakna sustava imprimitivnosti?

Research

1. Dizajni snage 3 i stupnja 3
2. Sustavi spojenih simetričnih dizajna
3. Kada podshema dolazi od vlakna sustava imprimitivnosti?
4. (Im)primitivnost Johnsonove sheme i “large sets” dizajna

Research

1. Dizajni snage 3 i stupnja 3
2. Sustavi spojenih simetričnih dizajna
3. Kada podshema dolazi od vlakna sustava imprimitivnosti?
4. (Im)primitivnost Johnsonove sheme i "large sets" dizajna
5. Primjena Hasse-Minkowskijeve teorije na asocijacijske sheme

Kraj kolegija